

Кафедра «Электромеханика и автомобильное электрооборудование»

**Пример оформления  
отчета**

по практическому занятию № 5  
дисциплины «Модели и методы расчета электромеханических систем»

Тема практического занятия:  
«Математическое моделирование переходных процессов  
при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения»

Выполнил:  
Студент IV-ЭТФ-5

И.И. Иванов

Принял:  
доц. каф. ЭМАЭ

М.Т. Мифтахов

Введение.....	3
1. Аналитическое исследование переходных процессов при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения.....	3
2. Численное моделирование переходных процессов при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения с использованием метода Рунге-Кутты четвёртого порядка.....	10
3. Результаты исследования переходных процессов при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения.....	12
Выводы по работе.....	14
Список использованных источников.....	15
Приложения.....	16

## Введение

Изучение переходных процессов, происходящих в электрических машинах при их работе в различных режимах, является крупнейшей проблемой современной электромеханики. Часто именно параметры переходных процессов выступают в качестве важнейших физических ограничений при проектировании электрических машин [1].

В настоящее время, благодаря стремительному развитию компьютерных технологий, исследование переходных процессов в электрических машинах предпочитают выполнять путём, так называемого, математического моделирования [2]. Этот подход предполагает решение с помощью персонального компьютера системы дифференциальных уравнений (математической модели), описывающей указанные переходные процессы в конкретной машине (или в общем случае в автоматизированной системе, в которую входит эта машина).

В случаях, когда необходимо строго учесть большинство физических факторов, влияющих на точность расчётов, принципиально возможно получение лишь приближенного решения таких систем дифференциальных уравнений с применением численных методов прикладной математики (численное моделирование переходных процессов).

При численном моделировании студентам вузов целесообразно начинать с применения простых одношаговых методов: метода ломанной Эйлера (упрощенного метода Лапласа) или улучшенного метода ломанной Эйлера (модифицированного метода Лапласа), а потом переходить к использованию более мощных вычислительных методов типа Рунге-Кутты [3], которыми обычно пользуются практикующие инженеры.

На практике при исследовании переходных процессов в конкретной машине лишь в ограниченном числе случаев, и то при условии принятия ряда упрощающих допущений, возможно нахождение аналитического решения, которое представляет собой конечный набор формул.

В данной работе проведено исследование переходного процесса при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения от мощного источника питания постоянного тока (рис. 1.1) двумя способами: а) с использованием аналитических решений; б) путём численного моделирования с применением одношагового метода Лапласа Рунге-Кутты четвёртого порядка.

### 1. Аналитическое исследование переходных процессов при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения

В схеме, представленной на рис. 1.1, исследуемый переходный процесс возникает при замыкании ключа  $S$ . Он математически описывается системой уравнений, содержащей два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$u_a = R_p i_a + L_p d i_a / dt + c_m \Phi_\delta \omega; \quad (1.1)$$

$$c_m \Phi_\delta i_a - m_c = J_p d \omega / dt, \quad (1.2)$$

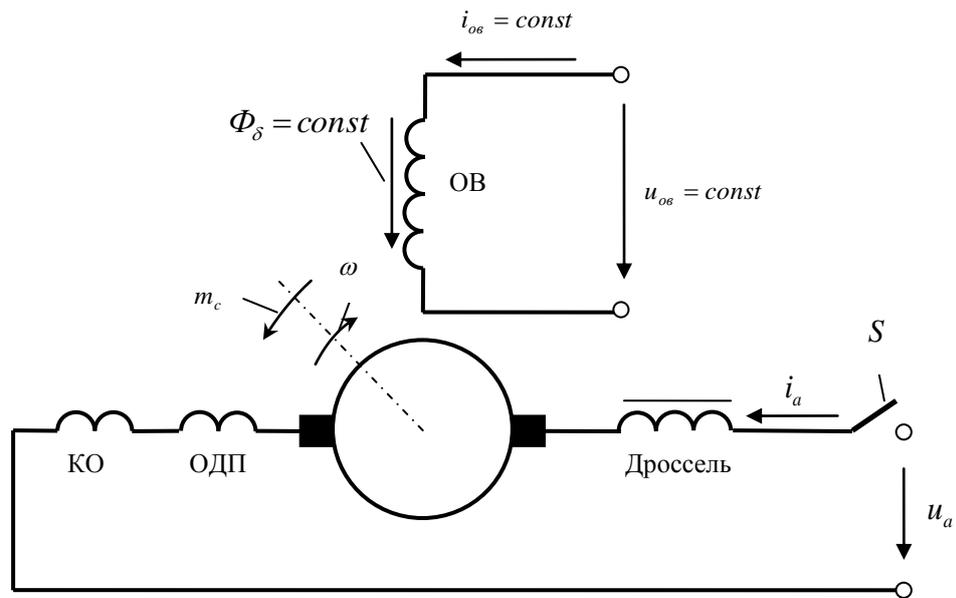


Рис. 1.1. К исследованию переходного процесса при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения

где  $u_a$  - мгновенное значение напряжения на зажимах якорной цепи, питаемой от идеализированного источника постоянного тока, В. Предполагается, что  $u_a = U_{ан} = const$ . Здесь  $U_{ан}$  - напряжение идеализированного источника питания якорной цепи в номинальном режиме работы ДПТ;

$c_m$  - обмоточная постоянная обмотки якоря;

$\Phi_\delta$  - основной (рабочий) магнитный поток главных полюсов, вб. Предполагается, что  $\Phi_\delta = \Phi_{\deltaн} = const$ . Здесь  $\Phi_{\deltaн}$  - магнитный поток главных полюсов в номинальном режиме;

$\omega$  - мгновенное значение угловой скорости вращения якоря,  $c^{-1}$ ;

$R_p$  - расчётное активное сопротивление якорной цепи, Ом. В электроприводах постоянного тока на базе ДПТ независимого возбуждения обычно последовательно в якорную цепь двигателя включают дроссель, как это показано на рис. 1.1, поэтому:

$$R_p = \Sigma R_{я\delta} + R_{др} = k_R \Sigma R_{я\delta}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\Sigma R_{я\delta}$  - суммарное сопротивление всех обмоток, включенных последовательно в якорную цепь двигателя (с учётом сопротивления скользящего контакта);  $R_{др}$  - сопротивление дросселя;  $k_R = R_p / \Sigma R_{я\delta}$ .

Предполагается, что  $R_p = const$ ;

$i_a$  - мгновенное значение тока якоря, А;

$L_p$  - расчётная индуктивность якорной цепи, Гн :

$$L_p = \Sigma L_{я\delta} + L_{др} = k_L \Sigma L_{я\delta}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\Sigma L_{я\delta}$  - индуктивность якорной цепи двигателя;  $L_{др}$  - индуктивность дросселя;  $k_L = L_p / \Sigma L_{я\delta}$ . Предполагается, что  $L_p = const$  ;

$t$  - время. Теоретически любой переходный процесс длится на бесконечном интервале времени -  $t \in [0; \infty)$ . На практике расчёт переходного процесса ведут на значительно более коротком интервале времени;

$J_p$  - расчётный момент инерции вращающихся частей электропривода, кг·м<sup>2</sup> :

$$J_p = J_{\delta} + J_{np} = k_J J_{\delta}. \quad (1.5)$$

Здесь  $J_{\delta}$  - момент инерции якоря двигателя;  $J_{np}$  - приведённый к валу двигателя момент инерции подвижных частей рабочего механизма;  $k_J = J_p / J_{\delta}$ . Предполагается, что  $J_p = const$  ;

$m_c$  - мгновенное значение статического момента сопротивления на валу двигателя, в состав которого, как это обычно принимают, здесь включен также и момент сопротивления от собственных потерь двигателя, н·м. Предполагается, что  $m_c = M_{эмн} = const$ . Здесь  $M_{эмн}$  - электромагнитный момент, развиваемый двигателем в номинальном режиме.

Уравнение (1.1) физически является уравнением равновесия напряжений в якорной цепи. Оно записано для общего случая, т.е. учитывает наличие дросселя, последовательно включаемого в якорную цепь ДПТ независимого возбуждения, работающего в составе электропривода. Этот дроссель призван ограничить темп нарастания тока якоря (т.е. первую производную от тока якоря по времени), что, прежде всего, необходимо для обеспечения надёжности полупроводниковых элементов, входящих в состав полупроводникового преобразователя, питающего якорную цепь.

Уравнение (1.2), физически являющееся уравнением равновесия моментов, обычно называют уравнением вращательного движения якоря.

На ДПТ независимого возбуждения в режимах, когда он работает с неизменным рабочим магнитным потоком, в соответствии с рис. 1.1 и системой дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2), имеется два канала воздействия.

Во-первых, можно воздействовать со стороны источника питания якорной цепи за счёт изменения  $u_a$ ; во-вторых, со стороны рабочего механизма за счёт изменения  $m_c$ . В практике электропривода первое воздействие называют управляющим, а второе – возмущающим.

Из системы уравнений (1.1) и (1.2) следует, что рассматриваемый переходный процесс исчерпывающе описывается двумя функциональными зависимостями: зависимостью угловой скорости якоря от времени -  $\omega = \omega(t)$  и зависимостью тока якоря от времени -  $i_a = i_a(t)$ . Первую зависимость

обычно называют электромеханическим переходным процессом, а вторую – электромагнитным переходным процессом.

Так как согласно законам коммутации [3] ток якорной цепи, содержащей индуктивность, не может измениться мгновенно, то рассматриваемый переходный процесс при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения целесообразно подразделить на два интервала.

На *первом интервале времени*, который по продолжительности является относительно не большим, когда  $t \in [0, t_1]$  и якорь неподвижен, т.е.

$$\omega \equiv 0. (1.6)$$

Это связано с тем, что на всём протяжении этого интервала времени мгновенное значение электромагнитного момента двигателя оказывается меньше статического момента сопротивления  $m_c$ ,

$$m_{эм} = c_m \Phi_\delta i_a < m_c,$$

а статический момент сопротивления на валу  $m_c$  в подавляющем большинстве практических случаев физически является пассивным и не способен привести якорь в движение.

При прямом пуске ДПТ (рис. 1.1) в начальный момент времени, когда  $t = 0$ , ток якоря

$$i_{a(t=0)} = 0. (1.7)$$

С учётом условия (1.6) закономерность изменения тока якоря  $i_a = i_a(t)$  определяется дифференциальным уравнением:

$$u_a = R_p i_a + L_p d i_a / dt. (1.8)$$

Разделив левую и правую части последнего уравнения на  $R_p$ , это уравнение можно привести к следующему виду:

$$T_a d i_a / dt + i_a = I_{an}, (1.9)$$

где  $T_a$  - электромагнитная постоянная времени якорной цепи:

$$T_a = L_p / R_p, (1.10)$$

$I_{an}$  - установившееся значение пускового тока якоря:

$$I_{an} = U_a / R_p. (1.11)$$

Уравнение (1.9) является неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянным коэффициентом  $T_a$ .

Согласно классическому подходу решение неоднородного дифференциального уравнения (1.9) [3] имеет в общем случае следующий вид:

$$i_a = i_{a св} + i_{a пр}, (1.12)$$

где  $i_{a св}$  - свободная составляющая тока якоря, которая физически является величиной, затухающей со временем;  $i_{a пр}$  - принуждённая составляющая тока якоря.

Свободная составляющая тока  $i_{a св}$  является решением однородного дифференциального уравнения, вытекающего из исходного неоднородного

дифференциального уравнения (1.9), если в нём принять, что правая часть равна нулю:

$$T_a di_{a\text{св}}/dt + i_{a\text{св}} = 0, \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, т.е. сводится к уравнению вида:

$$(1/i_{a\text{св}}) di_{a\text{св}} = -(1/T_a) dt. \quad (1.14)$$

Взяв неопределённый интеграл от левой и правой частей выражения (1.14), после простейших преобразований получим:

$$i_{a\text{св}} = Ae^{-t/T_a}, \quad (1.15)$$

где  $A$  - константа, определяемая ниже из начального условия (1.7).

Принуждённая составляющая тока якоря:

$$i_{a\text{нр}} = I_{a\text{н}}, \quad (1.16)$$

Согласно (1.12) общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1.9):

$$i_a = Ae^{-t/T_a} + I_{a\text{н}}, \quad (1.17)$$

Подставляя в (1.17) начальное условие (1.7), получим:

$$A = -I_{a\text{н}}. \quad (1.18)$$

С учётом (1.18) окончательно получим расчётную формулу, определяющую зависимость  $i_a = i_a(t)$  на первом интервале времени

$$i_a = I_{a\text{н}}(1 - e^{-t/T_a}), \quad (1.19)$$

где  $t \in [0, t_1]$ . Здесь  $t_1$  - момент времени, когда электромагнитный момент двигателя сравняется со статическим моментом сопротивления на валу, т.е. выполняется равенство:

$$m_{\text{эм}} = c_m \Phi_{\delta} i_{a1} = m_c. \quad (1.20)$$

Для рассматриваемого переходного процесса при принятых упрощающих допущениях:

$$i_{a1} = m_c / (c_m \Phi_{\delta}) = M_{\text{эмн}} / (c_m \Phi_{\delta\text{н}}) = I_{a\text{н}}. \quad (1.21)$$

Поэтому

$$t_1 = -T_a \ln(1 - I_{a\text{н}} / I_{a\text{н}}). \quad (1.22)$$

Второй интервал времени является по продолжительности относительно большим:  $t_2 \in [0, t_{2\text{м}}]$ , где  $t_{2\text{м}}$  - время протекания переходного процесса на втором интервале, выбираемое для практических расчётов.

Отметим, что теоретически любой переходный процесс длится на бесконечном интервале времени, т.е.  $t_{2\text{м}} \rightarrow \infty$ .

Собственно только на этом интервале времени происходит электромеханический переходный процесс разгона якоря, когда угловая скорость якоря плавно возрастает от начального значения

$$\omega_{(t=0)} = 0 \quad (1.23)$$

до установившегося значения, которое при условии, что  $t_{2mn} \rightarrow \infty$ , строго равно номинальному значению угловой скорости:

$$\omega_{(t \rightarrow \infty)} = \Omega_{уст} = \Omega_n.$$

С учётом (1.20) из уравнения (1.2), следует, что в начальный момент времени разгона якоря его угловое ускорение также равно нулю:

$$\omega'_{(t=0)} = 0. \quad (1.24)$$

Из уравнения (1.2) с учётом соотношения (1.21) следует, что

$$i_a = I_{ан} + [J_p / (c_m \Phi_{\delta_n})] d\omega / dt. \quad (1.25)$$

Подставляя (1.25) в (1.1) и проведя простейшие преобразования, получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$T_{эм} T_a d^2 \omega / dt^2 + T_{эм} d\omega / dt + \omega = \Omega_n, \quad (1.26)$$

где  $T_{эм}$  - электромеханическая постоянная времени:

$$T_{эм} = J_p R_p / (c_m \Phi_{\delta_n})^2. \quad (1.27)$$

В практических расчётах обычно принимают, что  $t_{2mn} = t_{2mnp} = 4T_{эм}$ . В данной работе принято, что  $t_{2mn} = 2t_{2mnp}$ ;

$\Omega_n$  - угловая скорость вращения якоря в номинальном режиме:

$$\Omega_n = [U_a - R_p M_{эмн} / (c_m \Phi_{\delta_n})] / (c_m \Phi_{\delta_n}). \quad (1.28)$$

Согласно классическому подходу решение неоднородного дифференциального уравнения (1.26) [3] имеет в общем случае вид:

$$\omega = \omega_{св} + \omega_{пр}, \quad (1.29)$$

где  $\omega_{св}$  - свободная составляющая угловой скорости, которая физически является величиной, затухающей со временем;  $\omega_{пр}$  - принуждённая составляющая угловой скорости.

Свободная составляющая угловой скорости  $\omega_{св}$  является решением однородного дифференциального уравнения, вытекающего из исходного неоднородного дифференциального уравнения (1.26), если в нём приравнять к нулю правую часть:

$$T_{эм} T_a d^2 \omega_{св} / dt^2 + T_{эм} d\omega_{св} / dt + \omega_{св} = 0. \quad (1.30)$$

Однородное дифференциальное уравнение (1.30) является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и согласно методу Эйлера имеет решение:

$$\omega_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (1.31)$$

где  $A_1, A_2$  - константы, определяемые ниже;  $p_1, p_2$  - корни характеристического уравнения, вытекающего из (1.30). Здесь предполагается, что:

$$p_2 \neq p_1. \quad (1.32)$$

Принуждённая составляющая угловой скорости:

$$\omega_{пр} = \Omega_n, \quad (1.33)$$

С учётом (1.31) и (1.35) решение неоднородного дифференциального уравнения (1.26) можно записать в общем виде:

$$\omega = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \Omega_n. \quad (1.34)$$

Для уравнения (1.26) характеристическим является уравнение:

$$T_{эм} T_a p^2 + T_{эм} p + 1 = 0. \quad (1.34)$$

Как известно, квадратное уравнение (1.34) имеет два корня:

$$p_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{D}) / (2T_a), \quad (1.35)$$

где  $D$  - дискриминант:

$$D = 1 - 4T_a / T_{эм}. \quad (1.36)$$

От значения дискриминанта зависит конкретный вид решения.

*Во-первых, если  $D > 0$ , т.е.  $T_{эм} > 4T_a$ , оба корня характеристического уравнения являются вещественными отрицательными числами:*

$$p_1 = -[1 - \sqrt{(1 - 4T_a / T_{эм})}] / (2T_a); \quad p_2 = -[1 + \sqrt{(1 - 4T_a / T_{эм})}] / (2T_a). \quad (1.37)$$

При этом:

$$\omega = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \Omega_n. \quad (1.38)$$

Так как по модулю второй корень больше первого:  $|p_2| > |p_1|$ , то второе слагаемое в (1.38) соответствует апериодической составляющей  $\omega_{св}$ , которая затухающей во времени быстро, а первое – апериодической составляющей, которая затухающей во времени медленно.

С учётом начальных условий (1.23) и (1.24) константы  $A_1$  и  $A_2$  в уравнении (1.37):

$$A_1 = \Omega_n [-p_2] / (p_2 - p_1); \quad A_2 = \Omega_n [p_1] / (p_2 - p_1). \quad (1.39)$$

Учитывая (1.38) и (1.39), окончательно получим расчётную зависимость для определения мгновенного значения угловой скорости:

$$\omega = \Omega_n \{ [-p_2 / (p_2 - p_1)] e^{p_1 t} + [p_1 / (p_2 - p_1)] e^{p_2 t} + 1 \}. \quad (1.40)$$

Учитывая (1.25), (1.27), (1.28) и (1.40), окончательно получим расчётную зависимость для определения мгновенного значения тока якоря:

$$i_a = (I_{ан} - I_{ан}) T_{эм} [p_2 p_1 / (p_2 - p_1)] (-e^{p_1 t} + e^{p_2 t}) + I_{ан}. \quad (1.41)$$

*Во-вторых, если  $D < 0$ , т.е. при условии, что  $T_{эм} < 4T_a$ , оба корня характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными числами с отрицательной вещественной частью. При этом переходный процесс является затухающим во времени и периодическим (колебательным):*

$$\omega = A e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha) + \Omega_n, \quad (1.42)$$

где  $A$  - константа;  $\sigma$  - постоянная затухания (вещественная часть комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения):

$$\sigma = -1 / (2T_a); \quad (1.43)$$

$\omega$  - собственная круговая частота (мнимая часть комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения):

$$\omega = \sqrt{(4T_a / T_{эм} - 1)} / (2T_a); \quad (1.44)$$

$\alpha$  - начальная фаза.

С учётом начальных условий (1.23) и (1.24) константы  $A$  и  $\alpha$  в уравнении (1.42):

$$\alpha = -\arctg(\omega/\sigma); A = -\Omega_n / \sin \alpha. \quad (1.45)$$

Учитывая (1.45), окончательно получим расчётную зависимость для определения мгновенного значения угловой скорости:

$$\omega = \Omega_n \{-e^{\sigma t} \sin[\omega t + \alpha] / \sin \alpha + 1\}. \quad (1.46)$$

Учитывая (1.25), (1.27), (1.28) и (1.46), окончательно получим расчётную зависимость для определения мгновенного значения тока якоря:

$$i_a = -(I_{an} - I_{aH}) T_{эм} e^{\sigma t} [\sigma \sin(\omega t + \alpha) + \omega \cos(\omega t + \alpha)] / \sin \alpha + I_{aH}. \quad (1.47)$$

*В-третьих, если  $D = 0$ , т.е. при условии, что  $T_{эм} = 4T_a$ , оба корня характеристического уравнения являются одинаковыми вещественными отрицательными числами:*

$$p_1 = p_2 = \sigma = -1/(2T_a). \quad (1.48)$$

При этом переходный процесс является затухающим во времени и апериодическим:

$$\omega = (A_1 + A_2 t) e^{\sigma t} + \Omega_n, \quad (1.49)$$

где  $A_1, A_2$  - константы, определяемые ниже.

С учётом начальных условий (1.23) и (1.24) константы  $A_1$  и  $A_2$  в уравнении (1.49):

$$A_1 = -\Omega_n; A_2 = \Omega_n \sigma. \quad (1.50)$$

Учитывая (1.50), окончательно получим расчётную зависимость для определения мгновенного значения угловой скорости:

$$\omega = \Omega_n \{(-1 + \sigma t) e^{\sigma t} + 1\}, \quad (1.51)$$

Учитывая (1.25), (1.27), (1.28) и (1.51), окончательно получим расчётную зависимость для определения мгновенного значения тока якоря:

$$i_a = (I_{an} - I_{aH}) T_{эм} \sigma^2 t e^{\sigma t} + I_{aH}. \quad (1.52)$$

## **2. Численное моделирование переходных процессов при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения с использованием метода Рунге-Кутты четвёртого порядка**

Из системы дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) следует, что первые производные от тока якоря  $i'_a = di_a/dt$  и угловой скорости  $\omega' = d\omega/dt$  по времени:

$$i'_a = di_a/dt = (u_a - R_p i_a - c_m \Phi_\delta \omega) / L_p; \quad (2.1)$$

$$\omega' = d\omega/dt = (c_m \Phi_\delta i_a - m_c) / J_p. \quad (2.2)$$

Численное моделирование рассматриваемого переходного процесса сводится к численному интегрированию системы непрерывных

дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2) для ограниченного ряда числовых значений времени  $t_n$  [3].

Численное моделирование рассматриваемого переходного процесса предполагает для каждого последующего момента времени  $t_{(n+1)}$  определение соответствующих числовых значений тока якоря  $i_{a(n+1)}$  и угловой скорости  $\omega_{(n+1)}$ .

Ограниченный ряд числовых значений времени обычно задают рекуррентным, т.е. многократно используемым по ходу расчёта, соотношением:

$$t_{(n+1)} = t_{(n)} + \Delta t, \quad (2.3)$$

где  $n$  - номер шага по времени:  $n = 0, 1, \dots, m$ . Здесь  $m$  - максимальный номер шага;  $\Delta t$  - шаг по времени, который для обеспечения точности решения должен выбираться не более некоторого минимального значения. Очевидно, что для  $n = 0$ , т.е. в начале переходного процесса  $t_{(0)} = 0$ .

В инженерной практике при численном интегрировании дифференциального уравнения первого порядка или системы из нескольких дифференциальных уравнений первого порядка наиболее употребительным является метод Рунге-Кутты четвёртого порядка [3].

Численное моделирование рассматриваемого переходного процесса с учётом принятых упрощающих допущений в соответствии с данным методом проводится с использованием рекуррентных формул, приведённых ниже.

Рекуррентные формулы для первого расчётного интервала времени, когда якорь неподвижен:

$$t_{1(n+1)} = t_{1(n)} + \Delta t_1; \quad (2.4)$$

$$i_{a(n+1)} = i_{a(n)} + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \quad (2.5)$$

$$\omega_{(n+1)} = 0, \quad (2.6)$$

где  $\Delta t_1$  - шаг по времени, принятый для первого расчётного интервала;

$$k_1 = \Delta t_1 [u_a - R_p i_{a(n)}] / L_p;$$

$$k_2 = \Delta t_1 \{u_a - R_p [i_{a(n)} + k_1/2]\} / L_p;$$

$$k_3 = \Delta t_1 \{u_a - R_p [i_{a(n)} + k_2/2]\} / L_p;$$

$$k_4 = \Delta t_1 \{u_a - R_p [i_{a(n)} + k_3]\} / L_p.$$

Начальные условия:  $t_{1(0)} = 0$ ;  $i_{a(0)} = 0$ ;  $\omega_{(0)} = 0$ .

Рекуррентные формулы для второго расчётного интервала времени, когда якорь вращается:

$$t_{2(n+1)} = t_{2(n)} + \Delta t_2; \quad (2.7)$$

$$i_{a(n+1)} = i_{a(n)} + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \quad (2.8)$$

$$\omega_{(n+1)} = \omega_{(n)} + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6, \quad (2.9)$$

где  $\Delta t_2$  - шаг по времени, принятый для второго расчётного интервала;

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t_2 [u_a - R_p i_{a(n)} - c_m \Phi_{\delta_n} \omega_{(n)}] / L_p; \\
m_1 &= \Delta t_2 [c_m \Phi_{\delta_n} i_{a(n)} - m_c] / J_p; \\
k_2 &= \Delta t_2 \{u_a - R_p [i_{a(n)} + k_1 / 2] - c_m \Phi_{\delta_n} [\omega_{(n)} + m_1 / 2]\} / L_p; \\
m_2 &= \Delta t_2 \{c_m \Phi_{\delta_n} [i_{a(n)} + k_1 / 2] - m_c\} / J_p; \\
k_3 &= \Delta t_2 \{u_a - R_p [i_{a(n)} + k_2 / 2] - c_m \Phi_{\delta_n} [\omega_{(n)} + m_2 / 2]\} / L_p; \\
m_3 &= \Delta t_2 \{c_m \Phi_{\delta_n} [i_{a(n)} + k_2 / 2] - m_c\} / J_p; \\
k_4 &= \Delta t_2 \{u_a - R_p [i_{a(n)} + k_3] - c_m \Phi_{\delta_n} [\omega_{(n)} + m_3]\} / L_p; \\
m_4 &= \Delta t_2 \{c_m \Phi_{\delta_n} [i_{a(n)} + k_3] - m_c\} / J_p.
\end{aligned}$$

Начальные условия:  $t_{2(0)} = 0$ ;  $i_{a(0)} = i_{a(t_1)}$ . Здесь  $i_{a(t_1)}$  - значение тока в конце первого расчётного интервала времени;  $\omega_{(0)} = 0$ .

При численном моделировании рассматриваемого переходного процесса принято:

$$u_a = U_{a_n} = const; \quad m_c = M_{эм_n} = const,$$

что позволило оценить точность численного моделирования путём сравнения его результатов с результатами аналитического решения, которое при принятых допущениях является точным решением.

Большим достоинством численного подхода к моделированию разнообразных физических явлений, происходящих в электрических машинах и трансформаторах, является возможность полного отказа от упрощающих допущений, принятых при аналитическом исследовании. Это позволяет учесть большинство физических факторов, влияющих на точность расчёта.

Так, например, в исходной системе дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) можно задать любой интересующий исследователя закон изменения любой из величин.

Важно отметить, что при плавном увеличении мгновенного значения напряжения  $u_a$  в процессе пуска ДПТ, можно значительно снизить максимальные значения тока якоря  $i_{a_{max}}$  и тем самым увеличить ресурс работы щёток и, соответственно, двигателя в целом.

Можно задать любой закон изменения момента сопротивления на валу  $m_c$  применительно к любому конкретному рабочему механизму, что нельзя сделать в рамках аналитического подхода. В частности, для механизмов с насосной характеристикой нагрузочного момента (вентиляторы, насосы и т.п.) обычно принимают, что  $m_c = m_0 + m_1(\omega / \Omega_n) + m_2(\omega / \Omega_n)^2$ .

### 3. Результаты исследования переходных процессов при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения

В приложении 1 представлена распечатка электронной таблицы Microsoft Excel с результатами расчёта переходных процессов при прямом

пуске ДПТ независимого возбуждения. Расчёты выполнены с использованием аналитических выражений, представленных в разделе 1, и путём численного моделирования по методике, изложенной в разделе 2.

В приложении 2 приведены расчётные кривые изменения угловой скорости вращения якоря  $\omega = \omega(t)$  и тока якоря  $i_a = i_a(t)$  от времени.

Исследование переходных процессов проведено для ДПТ серии 4П типа 4ПФ типоразмера 4ПФ250L.

Основные технические данные двигателя (табл. 10.6 [4]):

- номинальная мощность  $P_{2н} = 250 \text{ кВт}$ ;
- номинальное напряжение  $U_n = 440 \text{ В}$ ;
- номинальная частота вращения  $n_n = 1500 \text{ об / мин}$ .

В соответствии с аналитической математической моделью при принятых допущениях и заданных параметрах исследуемого ДПТ корни характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными числами, вещественная часть которых определяется по (1.43), а комплексная – по (1.44).

В аналитической математической модели расчётными зависимостями для  $\omega = \omega(t)$  и тока якоря  $i_a = i_a(t)$  являются, соответственно, уравнения (1.46) и (1.47).

На втором интервале времени для рассматриваемого переходного процесса, когда якорь приводит в движение, в расчётной кривой изменения тока якоря  $i_a = i_a(t)$  от времени с учётом результатов расчёта по аналитической математической модели было выделено четыре следующих участка:

- первый участок, для которого  $t_2 \in [0; 0,018 \text{ с}]$ .

Здесь происходит резкое увеличение тока от начального значения  $i_a(t_2 = 0) = 615,14 \text{ А}$  до максимума  $i_{a \text{ max}} = i_a(t_2 = 0,018 \text{ с}) = 7717,789 \text{ А}$ . Отметим, что этот максимум значительно меньше установившегося тока якоря в режиме короткого замыкания, т.е. при искусственном торможении якоря:  $I_{aн} = 10675,65 \text{ А}$ . Однако он примерно в 12,55 раза превышает номинальный ток якоря, что представляет серьёзную опасность для щёток ДПТ и электронных полупроводниковых элементов источника питания якорной цепи. Поэтому прямой пуск мощных ДПТ на практике не допустим, а результаты расчёта в данной работе представляют лишь теоретический интерес.

При этом угловая скорость постепенно увеличивается от начального значения  $\omega(t_2 = 0) = 0 \text{ с}^{-1}$  до  $\omega(t_2 = 0,018 \text{ с}) = 49,323 \text{ с}^{-1}$ ;

- второй участок, для которого  $t_2 \in [0,018; 0,054 \text{ с}]$ .

Здесь происходит резкое уменьшение тока якоря от начального значения  $i_a(t_2 = 0,018 \text{ с}) = 7717,789 \text{ А}$  до минимального значения  $i_{a \text{ мин}} = i_a(t_2 = 0,054 \text{ с}) = 2762,974 \text{ А}$ .

При этом угловая скорость постепенно увеличивается от начального значения  $\omega(t_2 = 0,018 \text{ c}) = 49,323 \text{ c}^{-1}$  до  $\omega(t_2 = 0,054 \text{ c}) = 139,956 \text{ c}^{-1}$ ;  
- третий участок, для которого  $t_2 \in [0,054; 0,132 \text{ c}]$ .

Здесь происходит постепенное уменьшение тока якоря от начального значения  $i_a(t_2 = 0,054 \text{ c}) = 2762,974 \text{ A}$  до минимального значения  $i_{a \text{ мин}} = i_a(t_2 = 0,132 \text{ c}) = 600,4928 \text{ A}$ .

При этом угловая скорость постепенно увеличивается от начального значения  $\omega(t_2 = 0,054 \text{ c}) = 139,946 \text{ c}^{-1}$  до  $\omega(t_2 = 0,132 \text{ c}) = 157,789 \text{ c}^{-1}$ ;  
- четвёртый участок, для которого  $t_2 \in [0,132; 0,24 \text{ c}]$ .

Здесь практически завершается переходный процесс и происходит постепенное изменение тока якоря от начального значения  $i_a(t_2 = 0,132 \text{ c}) = 600,4928 \text{ A}$  до практически установившегося значения  $i_{a \text{ уст}} = i_a(t_2 = 0,24 \text{ c}) = 615,166 \text{ A}$ .

При этом угловая скорость незначительно изменяется от начального значения  $\omega(t_2 = 0,132 \text{ c}) = 157,789 \text{ c}^{-1}$  до  $\omega(t_2 = 0,24 \text{ c}) = 157,559 \text{ c}^{-1}$ .

При численном моделировании рассматриваемого переходного процесса, как видно из приложения 1, обеспечена высокая точность расчёта.

### **Выводы по работе**

1. Цель работы - ознакомление с двумя математическими моделями, позволяющими произвести математическое моделирование переходного процесса при прямом пуске ДПТ независимого возбуждения.
2. Аналитическая математическая модель для исследования рассматриваемого переходного процесса справедлива лишь при принятии большого числа упрощающих допущений.
3. Численная математическая модель, используемая при численном моделировании рассматриваемого переходного процесса, принципиально позволяет отказаться от упрощающих допущений, принятых в рамках аналитической математической модели, и учесть большинство физических факторов, влияющих на точность расчёта.
4. Численное моделирование рассматриваемого переходного процесса, проведённое с использованием метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, обеспечило высокую точность расчёта для всех выделенных выше участков в интервале времени, принятом в качестве расчётного времени переходного процесса. При этом на каждом из этих участков выполнено лишь по 10 шагов по времени. Очевидно, что число этих шагов может быть уменьшено.

## Список использованных источников

1. Мартынов В.А. Математическое моделирование переходных процессов электрических машин на основе численного метода расчета электромагнитного поля. Автореф. дисс. на соиск. учен. степени докт. техн. наук.- М.: МЭИ, 1997.- 39 с.
2. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: Учеб. для вузов по спец. “Электромеханика”. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1994.- 318 с.
3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1977.- 832 с.
4. Справочник по электрическим машинам. Т.1/Под ред. И.П. Копылова и Б.К. Клокова. - М.: Энергоатомиздат, 1988.- 456 с.