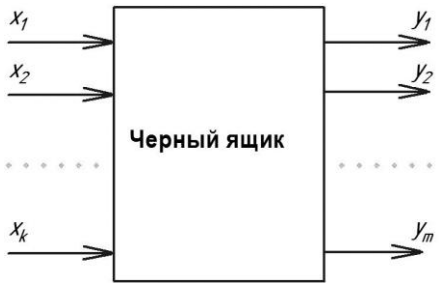
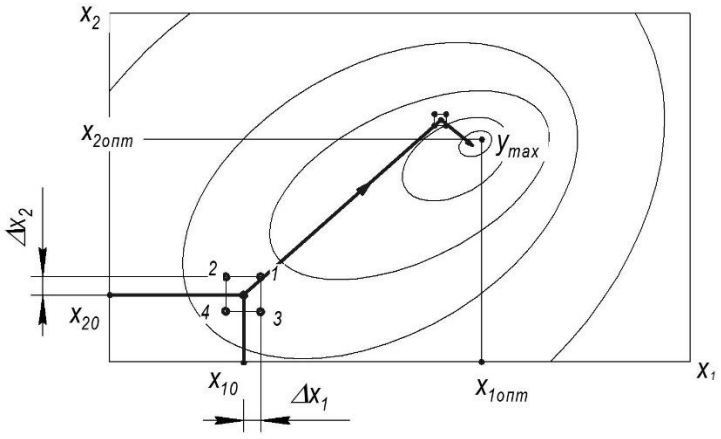
Ю.А. МАКАРИЧЕВ, Ю.Н. ИВАННИКОВ

МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ





Самара
Самарский государственный технический университет
2016

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)

К а ф е д р а «Электромеханика и автомобильное электрооборудование»

Ю.А. МАКАРИЧЕВ, Ю.Н. ИВАННИКОВ

МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Учебное пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2016

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ
УДК 519.281.2:621.313
М 30

Макаричев Ю.А., Иванников Ю.Н.
М 30 Методы планирование эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / *Макаричев Ю.А., Иванников Ю.Н.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с.: ил.

Методы планирования эксперимента применяются для построения интерполяционных моделей и оптимизации процессов и объектов, в том числе, электромеханических преобразователей и электротехнических комплексов. В пособии рассматриваются условия и необходимость применения математической теории планирования эксперимента в научных и инженерных исследованиях. Алгоритмы построения планов эксперимента применимы к большинству оптимизационных задач как проектно-расчетных, так и экспериментальных. Методы статистической оценки опытных данных необходимы для любого экспериментального исследования, претендующего на достоверность результатов.

Пособие предназначено для бакалавров направления подготовки 13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника» и магистрантов направления подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника». Пособие может быть полезным также аспирантам и научным сотрудникам, которые занимаются планированием экспериментальных исследований сложных, многофакторных систем, объектов и явлений.

Рецензент:
д-р техн. наук, профессор Зимин Л.С., ФГБОУ ВО СамГТУ

УДК 519.281.2:621.313
М 30

© Ю.А. Макаричев, Ю.Н. Иванников, 2016
© Самарский государственный технический университет, 2016

Содержание

		Стр.
	Предисловие……..	5
	Введение……	6
1	Основные определения……	8
2	Постановка задачи оптимизационного эксперимента…….	15
	2.1 Параметры оптимизации……..	16
	2.2 Требования к параметру оптимизации……	19
	2.3 Задачи с несколькими выходными параметрами……	21
	2.4 Обобщенный параметр оптимизации……..	24
	2.4.1. Построение обобщенного параметра по двухбалльной шкале……	25
	2.4.2. Функция желательности…….	27
3	Полный факторный эксперимент……..	31
	3.1 Математические основы планирования эксперимента….	34
	3.2 Принятие решений перед планированием эксперимента...	37
	3.3 Матрица полного факторного эксперимента……..	44
	3.4 Свойства матрицы полного факторного эксперимента…..	47
	3.5 Полный факторный эксперимент и математическая модель…….	48
	3.6 Рандомизация опытов в плане эксперимента……..	53
4	Дробный факторный эксперимент……..	57
	4.1 Дробные реплики ПФЭ……..	58
	4.2 Генерирующие соотношения…….	60
5	Крутое восхождение по поверхности отклика……..	64
	5.1 Вычисление коэффициентов регрессии и шагов крутого восхождения……..	64
	5.2 Алгоритм крутого восхождения……	66
	5.3 Принятие решения после крутого восхождения……..	69
	5.4 Оценка адекватности модели	72
6	Пример решения задачи оптимизации моментного двигателя	74
	6.1 Постановка задачи	74

6.2. Критерий оптимальности 75
6.3. Постановка задачи и выбор метода оптимизации 79
6.4. Оптимизация МД методом Бокса – Уилсона 84
6.4.1. Построение матрицы факторного эксперимента и вычисление оценки градиента 85
6.4.2. Движение по линии кратчайшего спуска 88
6.5. Результаты оптимизационного проектирования двигателей МД-100-1 и МД – 6 91
7 Метод наименьших квадратов…… 96
7.1 Методы аппроксимации опытных данных……. 96
7.2. Метод наименьших квадратов для одного фактора (пример)…….. 105
8 Темы практических занятий……. 108
Вопросы для самопроверки……. 125
Заключение…… 127
Библиографический список……..……... 128

Предисловие

Методы планирования эксперимента применяются для построения интерполяционных моделей и оптимизации процессов и объектов, в том числе, электромеханических преобразователей и электротехнических комплексов. В пособии рассматриваются условия и необходимость применения математической теории планирования эксперимента в научных и инженерных исследованиях. Алгоритмы построения планов эксперимента применимы к большинству оптимизационных задач как проектно-расчетных, так и экспериментальных. Методы статистической оценки опытных данных необходимы для любого экспериментального исследования, претендующего на достоверность результатов.

В научно-исследовательской деятельности электромеханика (бакалавра, магистра, аспиранта, докторанта), кроме теоретических исследований, значительную долю составляют экспериментальные работы по определению параметров и характеристик электромеханических преобразователей которые, зависят от множества внутренних и внешних факторов.

Следовательно, исследователю – электромеханику необходимо владеть методами теории математического планирования эксперимента для успешного решения научных, производственных и технологических проблем и задач.

Освоение содержания данного учебного пособия позволяет достигнуть основной учебной цели: сформировать у студентов компетентность в области теории и практики проведения экспериментального научного исследования.

Введение

Планировать эксперимент человека заставила сама жизнь. Древний человек при охоте на крупного зверя должен был выбрать *оптимальную* массу и форму камня, с которым он отправлялся за добычей в зависимости от многих *факторов*: размера планируемой добычи, своих физических возможностей, расстояния и т. д. В результате *экспериментальной проверки* появлялись более совершенные орудия для охоты, земледелия и войны.

Естественно, что статистические методы планирования эксперимента появились значительно позже – в начале двадцатого столетия. Их основы были заложены в работах английского статистика Рональда Фишера, в которых автор доказал целесообразность одновременного варьирования всеми факторами, существенно влияющими на оптимизируемый параметр [26], в отличии от широко распространенного до этого однофакторного эксперимента.

Наиболее эффективное практическое применение планирования экстремального эксперимента, теоретические основы которого заложили G. Box и K. Wilson, получило в 40-60 годах XX века при реализации «Манхэттенского проекта» в США. Сложнейшие теоретические гипотезы были проверены в ходе масштабных экспериментальных исследований, которые требовалось провести в кратчайшие сроки. Идея метода Бокса–Уилсона заключалась в том, что ставились небольшие серии опытов, в каждой из которых одновременно варьировались по определенным правилам все факторы. Серии организовывались таким образом, чтобы по результатам предыдущей серии можно было бы спланировать условия проведения последующих опытов. Таким образом, пошагово достигался запланированный результат по нахождению области оптимума.

Развитие теории и практики планирования эксперимента получило в работах Хантера, Д. Финта, Дж. Кифера, Х. Шенка, Д.К. Монтгомери, В.В. Налимова Ю.П. Адлера, И.П. Копылова, Б.А. Ивоботенко, Э.К. Стрельбицкого и других зарубежных и российских ученых[2,5-9,12].

В практической работе инженера-электромеханика экспериментальная часть составляет важнейшую компоненту исследовательской деятельности. Перед инженером постоянно встают проблемы оптимизации электромеханических преобразователей, процессов их производства и эксплуатации. Такие многофакторные задачи можно решить только с помощью методов современной теории планирования физического и математического эксперимента.

Таким образом, для успешного решения научных, производственных, и технологических проблем и задач, инженеру-исследователю необходимо обладать компетенциями в области математической теории и практических навыков планирования эксперимента и методов обработки экспериментальных данных. Данное учебное пособие ставит целью помочь освоить эти компетенции бакалаврам и магистрам профиля подготовки «Электроэнергетика и электротехника» на примерах решения оптимизационных задач электромеханики и электроэнергетики. Так же оно может быть полезно инженерам, аспирантам, занимающимся исследовательской работой.

Учебное пособие составлено на основе теоретических материалов из литературы, список которой представлен в работе, а также на основе лекционного курса «Методы планирования эксперимента и обработки данных», в течение длительного времени читаемого студентам и аспирантам электротехнического факультета Самарского государственного технического университета профессором Ю.А. Макаричевым. В учебном пособии, с согласия автора, использованы материалы диссертационных исследований доцента В.Н. Овсянникова, проведённых при разработке, теоретическом и экспериментальном исследовании моментных электродвигателей постоянного тока с беспазовым якорем [17].

1. Основные определения.

Большинство научных исследований связано с экспериментом. Он проводится в лабораториях, на производстве, на опытных полях и участках, в клиниках и т. д. Эксперимент может быть физическим, социальным, политическим, психологическим и т. д. Он может проводиться непосредственно на объекте или на его модели – физической или математической (расчетной).

Если модель достаточно точно описывает объект, то эксперимент на объекте может быть заменен экспериментом на модели. В последнее время наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели. Это связано с бурным развитием компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения. Во многих случаях можно получать новые сведения об объекте, экспериментируя на модели, если она достаточно точно описывает объект. Это напрямую относится и к области создания и исследования электротехнических объектов и процессов в электромеханических преобразователях, электрических сетях и электроэнергетических системах. Дорогостоящие, а порой и недопустимые эксперименты на таких объектах, заменяются расчетными, как правило, компьютерными экспериментами на математической модели, основанной на численном моделировании электромагнитных, тепловых и иных процессов. Недостатком численного моделирования электротехнических объектов и процессов, в том числе, включающего решение численными методами полевых задач, является сложность и трудоемкость расчетов. Поэтому для оптимизационного исследования рационально проводить ограниченные серии опытов, по результатам которых уточняются (планируются) условия проведения последующих исследований.

Планирование эксперимента *- это процедура выбора числа и условий проведения опытов (физических или расчетных), необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.*

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны.

Поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов, оценка и уточнение констант теоретических моделей, выбор наиболее приемлемых из некоторого множества гипотез о механизме явлений, исследование диаграмм параметр-свойство – вот примеры задач, при решении которых применяется планирование эксперимента. Можно сказать, что там, где есть эксперимент, имеет место и наука о его проведении - планирование эксперимента.

Поиск оптимальных условий или значений некоторого параметра объекта исследования является одной из наиболее распространённых научно-технических задач. Они возникают тогда, когда установлена возможность технической реализации некоторого объекта или процесса и необходимо найти наилучшие (оптимальные в некотором смысле) условия их реализации. В качестве примера можно привести задачи технического эксперимента по поиску условий, при которых достигается максимум коэффициента полезного действия, надежности или долговечности изделия, минимума массы или потерь мощности в электромеханическом преобразователе. Методам решения оптимизационных экспериментальных и расчетных задач посвящено данное учебное пособие.

В математическом определении ***оптимизация*** *— это нахождение экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства.*

В теории планирования эксперимента область конечномерного векторного пространства представлена совокупностью факторов – варьируемых по воле экспериментатора величин, существенно влияющих на исследуемый объект (процесс).

Для определения понятия ***объекта исследования*** удобно воспользоваться кибернетической системой «черный ящик» [9], рис.1.1.

Объектом исследования в приложении к области исследования электроэнергетики и электротехники могут выступать электрические машины, трансформаторы, энергетические системы, электрические сети, электротехнологические установки и комплексы и т.д. Кроме самих физических объектов в качестве объекта оптимизационного

исследования могут выступать их математические (расчетные) компьютерные модели.

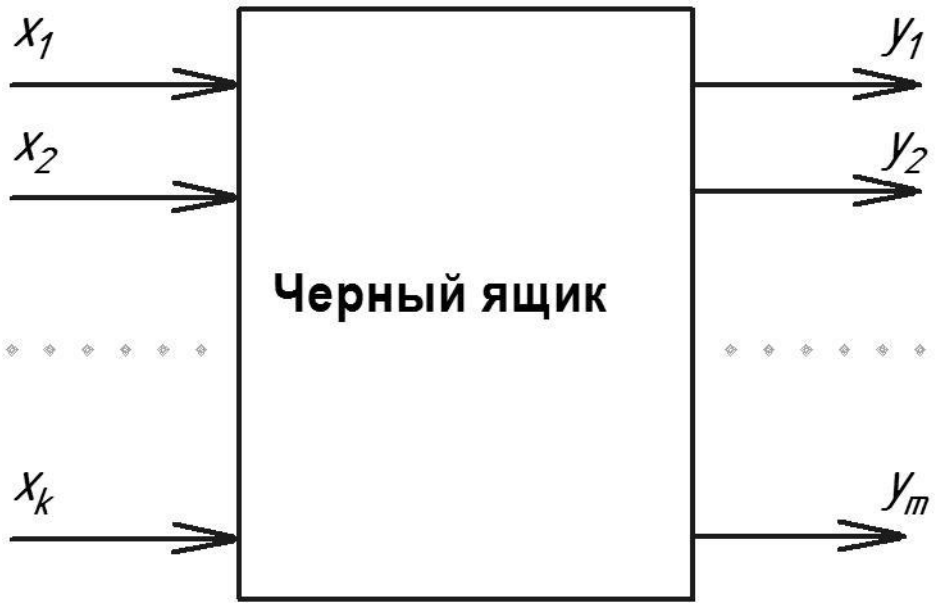


Рисунок 1.1 – Схема «черного ящика»

Стрелки справа на рисунке 1.1 изображают численные характеристики целей исследования. Мы обозначаем их буквой игрек и называем ***параметрами оптимизации***. В литературе вы можете встретить другие названия: *критерий оптимизации, целевая функция, выход «черного ящика»* и т. Если параметров оптимизации несколько, то такая задача называется многокритериальной. Часто такая задача не имеет единственного решения и решается методами многокритериальной оптимизации, суть которых заключается в отыскании компромиссного решения. При одном выходном параметре, как правило, задача имеет решение и его отыскание возможно различными методами. Основные из них рассмотрены в данном пособии.

y_j *– численные характеристики целей исследования –* ***параметры оптимизации.***

x_i *– воздействия на «черный ящик» (объект исследования) –* ***факторы*** *(входы «черного ящика», варьируемые переменные).*

Значения, которые могут по воле экспериментатора принимать факторы, называются ***уровнями.***

Количество уровней факторов может быть, как конечным (дискретные факторы), так и бесконечным (непрерывный ряд). На практике при проведении физического эксперимента точность, с которой устанавливается значение фактора, не беспредельна. Поэтому каждый фактор в физическом и в расчетном эксперименте имеет определенное число дискретных уровней. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Этот набор определяет и условия проведения одного из возможных опытов. Все возможные наборы состояний определяют полное множество выходного параметра из которого экспериментатор должен выбрать оптимальное значение оптимизируемого параметра и набор уровней факторов ему соответствующих.

Если перебрать все наборы состояний «черного ящика», то мы получим число возможных различных опытов. Чтобы узнать это число, достаточно число уровней факторов (если оно для всех факторов одинаково) возвести в степень числа факторов k:

$$N = p^k, \qquad (1.1)$$

где p - число уровней.

Реальные объекты, с которыми приходится сталкиваться инженеру-исследователю, обладают огромной сложностью. Так, на первый взгляд простая система с десятью факторами на двух уровнях имеет 1024 состояния, а для пяти факторов на пяти уровнях их уже 3125! В реальных задачах варьирования на двух или пяти уровнях, как правило, недостаточно. В этих условиях экспериментатор просто вынуждены отказаться от таких экспериментов, которые включают все возможные опыты: перебор слишком велик. Тогда возникает вопрос: сколько и каких опытов надо включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу? Здесь-то и приходит па помощь планирование эксперимента.

Параметры оптимизации связаны с факторами некоторыми зависимостями. Если объектом исследования является физический объект или процесс, то эту зависимость выражают уравнением, в общем виде:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2), связывающее параметр оптимизации с факторами в физическом эксперименте называют ***математической моделью.***

В планировании физического эксперимента при поиске оптимальных условий желательно, чтобы математическая модель (ММ) была по возможности выражена достаточно простым уравнением при сохранении адекватности. Часто используются простейшие линейные ММ или модели, выраженные в виде полинома.

Если речь идет о расчетном эксперименте, то зависимость параметра оптимизации от факторов может иметь очень сложную взаимосвязь. Так, например, чтобы определить зависимость КПД трансформатора от его геометрических размеров, необходимо выполнить сложные и трудозатратные электромагнитный, тепловой и механический расчеты. В некоторых задачах потребуется решение системы дифференциальных уравнений численными методами. В этом случае, в общем виде математическая модель будет представлять собой функционал

$$y = F(X_k), \qquad (1.3)$$

где $X_k \in D_x$, D_x *– область определения факторного пространства*.

Сложность анализа функционала (1.3) также, как при проведении физического эксперимента, приводит к необходимости применения упрощенной ММ (1.2), адекватной в некоторой ограниченной области факторного пространства D_x функционалу (1.3).

Зависимости параметра оптимизации от значений (уровней) факторов геометрически могут быть интерпретированы *поверхностями уровней (поверхностями отклика)* разного порядка. Это может быть линия при однофакторном эксперименте, поверхность или плоскость при двух факторах и гиперповерхность *k*-того порядка при количестве факторов *k*. Наиболее наглядно поверхность отклика иллюстрируется при двухфакторном эксперименте в виде линий равного уровня *y=const*, при изображении поверхности участка местности на географической карте (рис.1.2).

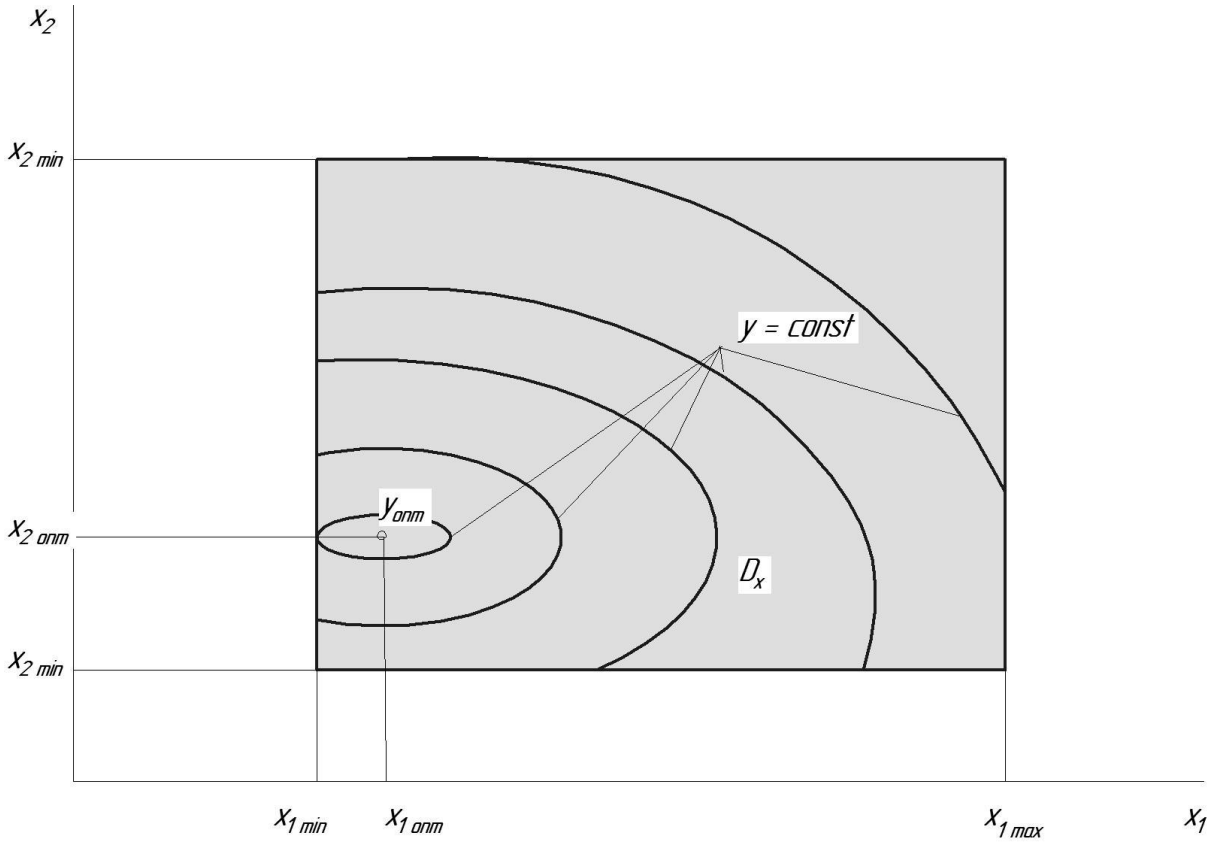


Рисунок 1.2 – Проекции линий равного уровня на плоскость

Проведение эксперимента начинается теоретического обоснования целей и задач, планирования алгоритма проведения исследований, выбора методов математической статистики для обработки опытных данных.

Нужно иметь в виду, что при планировании эксперимента не безразлично, какими свойствами обладает объект исследования. Укажем два основных требования, с которыми приходится считаться. Прежде всего существенно, *воспроизводятся ли на объекте результаты эксперимента*. Выберем некоторые уровни для всех факторов и в этих условиях проведем эксперимент. Затем повторим его несколько раз через некоторые промежутки времени и сравним значения параметра оптимизации. Разброс этих значений характеризует ***воспроизводимость*** результатов. Если он не превышает некоторой заранее заданной величины (наших требований к точности эксперимента), то объект удовлетворяет требованию воспроизводимости результатов, а если превышает, то не удовлетворяет этому требованию. Плохая воспроизводимость может объясняется действием одного или несколь-

ких факторов, систематически изменяющихся (дрейфующих) во времени. В этом случае нужно обращаться к специальным методам планирования. Эти случаи мы не будем рассматривать. Цель настоящего пособия – изложение методов планирования экстремального эксперимента для воспроизводимых управляемых статических объектов.

Мы будем рассматривать только такие объекты, для которых требование воспроизводимости выполняется.

При планировании эксперимента, надо иметь в виду, что при оптимизации распространён так называемый детерминированный подход, особенно широко используемый в электротехнике. При этом предполагается построение физической модели объекта или процесса на основании тщательного изучения механизма явлений (например, законов электродинамики или термодинамики), что позволяет получить математическую модель объекта в виде системы дифференциальных уравнений. Несомненно, что детерминированный и статистический (связанный с планированием эксперимента) подходы должны разумно дополнять друг друга.

2. Постановка задачи оптимизационного эксперимента

Под оптимизацией понимается процесс нахождения максимума или минимума функции цели (параметра оптимизации)

$$\mathbf{Y}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (2.1)$$

при условии, что изображающая точка в пространстве варьируемых факторов $\mathbf{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит допустимому множеству Dx, которое определяется совокупностью неравенств

$$Hi(x_1, x_2, \ldots, x_n) <> 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad (2.2)$$

где Hi, - некоторая функция факторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, накладывающая ограничения на предельно допустимые значения некоторых из них, например, положительность или их цельночисленность в силу физического смысла. Из-за нестрогости неравенств (2.2), допускающих возможность равенства, эти ограничения могут изображаться не только поверхностями в n- мерном пространстве, но и линиями или отдельными точками на поверхности функции цели [15].

С появлением компьютеров качественно возросли возможности быстро развивающихся алгоритмических методов в области решения задач математического моделирования объектов и процессов в электроэнергетике и электромеханике. На основе высокоразвитой математической базы вопросы оптимизации сложных объектов, в частности электротехнических, получили мощный инструмент в виде вычислительном техники, которая позволила использовать разнообразные методы регулярного и вероятностного итеративного решения этих задач.

Изменилась и роль эксперимента, как ключевого этапа решения научных проблем и задач. Исходя из требований сокращения времени и стоимости экспериментальных исследований, достоверности получаемых результатов на первый план в эксперименте выходит необходимость планирования стратегии его проведения, разработки плана экспериментальных исследований с использованием математических методов статистики, которые обеспечили бы получение максимума информации при минимальном количестве варьирования факторов или опытов.

Несмотря на эти изменения в стратегии и тактике экспериментальных исследований по-прежнему постановка задачи начинается с определения цели эксперимента. Для этого при планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Эта задача далеко не всегда очевидна, с трудом поддается формализации и относится к творческой составляющей исследования. Цель оптимизации должна быть четко сформулирована и допускать количественную оценку.

Характеристику цели, заданную количественно, будем называть ***параметром оптимизации***.

В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть весьма разнообразными как по своей физической сути, так и методам их определения.

Любой, более или менее сложный объект, характеризуется большим количеством качеств, определяющих его технические, экономические, эстетические, экологические, социальные и прочие свойства. Из них необходимо выбрать главные, или синтезировать искусственные параметры, объединяющие основные требования к качеству объекта (процесса) и выразить их в количественном виде.

2.1. Параметры оптимизации.

Реальные ситуации, как правило, сложны. Они часто требуют одновременного учета нескольких, иногда очень многих, параметров. В принципе каждый объект может характеризоваться сразу всей совокупностью параметров, определяющих его качество, или любым подмножеством из этой совокупности. Движение к оптимуму возможно, если выбран один-единственный параметр оптимизации. Тогда прочие характеристики процесса уже не могут выступать в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями.

Приведем пример. Из теории проектирования электрических машин известно, что с увеличением плотности тока в обмотках j, масса активных частей машины m снижается. Для бортовых авиационных машин это один из важнейших параметров. Но, с ростом плотности

тока растут и электрические потери в обмотках – также значимый параметр для этого класса машин (рис.2.1).

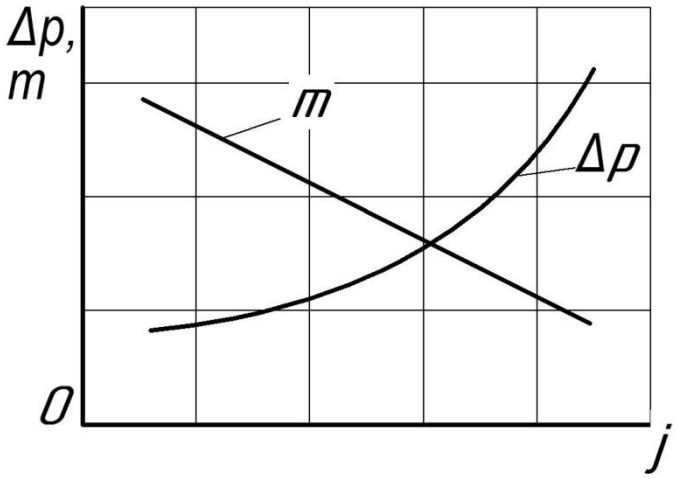


Рисунок 2.1 – Зависимость массы и потерь в электрической машине от плотности тока в обмотках

Одновременно эти два параметра оптимизировать в функции плотности тока невозможно – улучшение одного ведет к ухудшению значения второго. В этом случае один из параметров (наименее важный) назначается параметром лимитёром. Например, масса машины должна быть не более некоторого значения m_0, а оптимизируется второй параметр.

Другой путь решения подобных задач – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества частных [1,2].

Для классификации параметров оптимизации в [2] предлагается выделить следующие типы:

- экономические;
- технико-экономические;
- технико-технологические;
-прочие (психологические, эстетические, экологические, социальные и др.).

Экономические параметры оптимизации, такие, как прибыль, себестоимость и рентабельность, обычно используются при исследовании действующих промышленных объектов, тогда как затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях, в том

числе и лабораторных. Если цена опытов одинакова, затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставить для решения данной задачи. Это в значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

Среди технико-экономических параметров наибольшее распространение имеет производительность. Такие параметры, как долговечность, надежность и стабильность, связаны с длительными наблюдениями. Имеется некоторый опыт их использования при изучении дорогостоящих ответственных объектов, например в электроэнергетике. В электротехнике к этому виду параметров относят коэффициент полезного действия агрегата или участка энергетической системы.

К технологическим параметрам в энергетике можно отнести коэффициент мощности (cos φ), стабильность и качество электроэнергии.

С ухудшением экологической обстановки на планете экологические параметры становятся одними из наиболее значимых, особенно при освоении северных территорий и шельфа морей, с их уязвимой природной системой.

При создании устройств бытового назначения важную роль играют эстетические и психологические параметры объектов. Эти параметры трудно выразить в численной форме, но их значение нельзя недооценивать при разработке новой продукции.

Пример 2.1. Во время второй мировой войны несколько сот английских торговых судов на Средиземном море были вооружены зенитными орудиями для защиты от вражеских бомбардировщиков. Поскольку это мероприятие было достаточно дорогим (требовалось иметь на каждом судне боевую команду), через несколько месяцев решили оценить его эффективность. Какой из параметров оптимизации более подходит для этой цели? [2]

Число сбитых самолетов?

Потери в судах, оснащенных орудиями, по сравнению с судами без орудий?

Если Вы считаете, что эффективность установления орудий на торговые суда можно оценить числом сбитых самолетов, то Вы вряд ли смогли бы занять пост командующего английским флотом па Средиземном море. Выбранный

Вами параметр оптимизации оценивает эффективность уничтожения самолетов. В то же время ясно, что значения параметра оптимизации в этом случае будут низкими, так как существуют куда более эффективные средства для этой цели (авиация, боевой флот), чем зенитные орудия на торговых судах.

Если же Вы полагаете, что эффективность установки орудий на торговые суда можно оценить сопоставлением потерь в судах, оснащенных орудиями, с потерями в судах без орудий, то это разумный выбор параметра оптимизации, потому что основной задачей при установке орудий была защита судов. Самолеты вынуждены были теперь использовать противозенитные маневры и бомбометание с большой высоты, что уменьшало потери. Из числа атакованных самолетами торговых судов с зенитными орудиями было потоплено 10% судов, а потери в судах без орудий составили 25%. Затраты на установку орудий и содержание боевых расчетов окупились очень быстро.

Главное при выборе параметра оптимизации – он должен в наиболее полной мере отражать цель исследования.

2.2. Требования к параметру оптимизации.

Параметр оптимизации — это признак, по которому мы хотим оптимизировать процесс. Он должен быть ***количественным***, задаваться числом. Мы должны уметь его измерять или вычислять при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, будем называть областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, стоимость продукта, число бракованных изделий, удельная мощность машины, КПД и т.д. Перечисленные параметры имеют ограничение снизу, а некоторые (КПД) снизу и сверху. Число годных или бракованных изделий имеет дискретную область определения.

Если параметр оптимизации невозможно измерить количественно, то применяют *ранжирование*: параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее заданной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т.д. Простейшей шкалой является двухбалльная: годен – негоден, зачет – незачет.

Ранг – это количественная оценка качественного параметра оптимизации, выраженная, как правило, субъективно.

Ранговый подход часто оказывается грубым, нечувствительным, но он в некоторых случаях является единственно возможным и возможность такой количественной оценки результатов не должна вызывать сомнений.

Следующее требование к параметру оптимизации – ***однозначность***. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации. (Обратное утверждение неверно: одному значению параметра оптимизации могут соответствовать разные наборы значений факторов.)

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации наиболее полно оценивал эффективность системы в целом.

Представление об эффективности системы может корректироваться по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. В соответствие с этим может изменяться и параметр оптимизации.

Пример 2.2. При разработке специального высокоскоростного электродвигателя для использования в авиационной технике главным параметром оптимизации была выбрана удельная по массе полезная мощность машины. В ходе оптимизационного проектирования этот параметр был доведен до технического максимума. Но источником питания такого двигателя является частотный преобразователь, имеющий, естественно, не стопроцентный КПД. Поэтому на втором этапе исследования система электропривода оптимизировалась в целом по новому критерию – минимуму так называемой полетной массы. Этот обобщенный критерий учитывает не только массу самого изделия, но и дополнительную массу, необходимую для функционирования системы в целом (в том числе и дополнительную массу топлива, необходимую для покрытия потерь в электроприводе).

Эффективность системы необходимо оценивать в целом. Если система состоит из нескольких подсистем, имеющих собственные параметры оптимизации, то оптимизация по каждому из них «не исключает возможности гибели системы в целом» [9].

Следующее требование к параметру оптимизации – требование ***универсальности*** или ***полноты***. Параметр должен быть способен всесторонне характеризовать объект. Этому требованию недостаточ-

но отвечают технические и технологические параметры, обладающие, как правило, специфичностью. Наиболее универсальными и полными являются обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции нескольких частных параметров. Построение таких параметров будет рассмотрено в следующем разделе настоящего пособия.

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым (измеряемым). Это связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента.

В заключение отметим, что выбор параметра оптимизации является сложной и нетривиальной задачей, от решения которой будет зависеть и математическая модель объекта, и результаты исследования в целом.

2.3. Задачи с несколькими выходными параметрами.

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве электротехнических изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, экологические и другие параметры (надежность, КПД, удельную мощность и т. д.). Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько, функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения цели исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого можно воспользоваться корреляционным анализом.

При этом между всевозможными парами параметров необходимо вычислить коэффициент парной корреляции, который является общепринятой в математической статистике характеристикой связи

между двумя случайными величинами. Если обозначить один параметр через y_1 а другой — через y_2, и число опытов, в которых они будут измеряться, — через N, так, что u=1, 2, . . ., N, где u — текущий номер опыта, то коэффициент парной корреляции r вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_{u=1}^{N}(y_{1u} - \bar{y}_1)(y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^{N}(y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \sum_{u=1}^{N}(y_{2u} - \bar{y}_2)^2}}.$$

Здесь

$$\bar{y}_1 = \sum_{u=1}^{N} y_{1u} / N \text{ и } \bar{y}_2 = \sum_{u=1}^{N} y_{2u} / N$$

средние арифметические соответственно для y_1 и y_2.

Значения коэффициента парной корреляции могут лежать в пределах от -1 до +1. Если с ростом значения одного параметра возрастает значение другого, у коэффициента будет знак плюс, а если уменьшается, то минус. Чем ближе найденное значение r к единице, тем сильнее значение одного параметра зависит от того, какое значение принимает другой, т.е. между такими параметрами существует линейная связь, и при изучении процесса можно рассматривать только один из них. Необходимо помнить, что коэффициент парной корреляции как мера тесноты связи имеет четкий математический смысл только при линейной зависимости между параметрами и в случае нормального их распределения.

Для проверки значимости коэффициента парной корреляции нужно сравнить его значение с табличным (критическим) значением r, которое приведено в табл.2.1. Для пользования этой таблицей нужно знать число степеней свободы $f = N - 2$ и выбрать определенный уровень значимости, например, равный 0,05. Такое значение уровня значимости называют еще 5%-ным уровнем риска, что соответствует вероятности верного ответа при проверке нашей гипотезы $P = 1 - \alpha = 0{,}95$, или 95%. Это значит, что среднем только в 5% случаев возможна ошибка при проверке гипотезы.

Таблица 2.1. Критическое значение коэффициента парной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Число степеней свободы f	Критическое значение r	Число степеней свободы f	Критическое значение r	Число степеней свободы f	Критическое значение r
1	0,997	9	0,602	17	0,456
2	0,950	10	0,576	18	0,444
3	0,878	11	0,553	19	0,433
4	0,811	12	0,532	20	0,423
5	0,754	13	0,514	30	0,349
6	0,707	14	0,497	50	0,273
7	0,666	15	0,482	80	0,217
8	0,632	16	0,468	100	0,195

Проверка гипотезы сводится к сравнению абсолютной величины коэффициента парной корреляции с критическим значением. Если экспериментально найденное значение r меньше критического, то нет оснований считать, что имеется тесная линейная связь между параметрами, а если больше или равно, то гипотеза о корреляционной линейной связи не отвергается.

При высокой значимости коэффициента корреляции любой из двух анализируемых параметров можно исключить из рассмотрения как не содержащий дополнительной информации об объекте исследования. Исключить можно тот параметр, который технически труднее измерять, или тот, физический смысл которого менее ясен. При планировании эксперимента целесообразно измерять все параметры, затем оценить корреляцию между ними и строить модели для их минимально возможного числа или же воспользоваться обобщенным параметром. Но бывают случаи, когда приходится рассматривать и коррелированные параметры.

Проблема выбора параметра оптимизации, как правило, сложная и нетривиальная задача, от грамотного решения которой, во многом зависит успешное достижение целей оптимизационного эксперимента. Авторы надеются, что данная глава будет полезна не только при

решении учебных задач, но и в тех практических исследованиях, которые читатели будут проводить в своей научной и исследовательской работе.

Из многих параметров, характеризующих объект исследования, только один, часто обобщенный, может служить параметром оптимизации. Остальные рассматриваются как ограничения.

2.4. Обобщенный параметр оптимизации.

Создание единого параметра оптимизации, как правило, производится путем обобщения частных параметров. Как уже говорилось, из многих откликов, определяющих объект, очень часто трудно выбрать один, самый важный. Это часто сопряжено с огрублением и даже с потерей важной информации. Познакомимся с более сложной ситуацией, когда необходимо множество откликов обобщать (свертывать) в единый количественный признак. С таким обобщением связан ряд трудностей.

Каждый отклик имеет свой физический смысл и свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, прежде всего, приходится ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов — это делает их сравнимыми. Выбор шкалы — не простая задача, зависящая от априорных сведений об откликах, а также от той точности, с которой мы хотим определить обобщенный признак.

После того как для каждого отклика построена безразмерная шкала, возникает следующая трудность — выбор правила комбинирования исходных частных откликов в обобщенный показатель. Единого правила не существует. Здесь можно идти различными путями, и выбор пути не формализован. Рассмотрим несколько различных способов построения обобщенного показателя.

2.4.1. Построение обобщенного параметра по двухбалльной шкале.

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов $y_u(u=1,2, \ldots, n)$ и каждый из этих откликов измеряется в N опытах.

Тогда y_u. — это значение u-го отклика в i-м опыте (i = 1,2, . . ., N). Каждый из откликов y_u имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность. Введем простейшее преобразование: набор данных для каждого y_u поставим в соответствие с самым простым стандартным аналогом — шкалой, на которой имеется только два значения: 0 — брак, неудовлетворительное качество, 1 — годный продукт, удовлетворительное качество. Преобразованные значения обозначим так: y_{ui} — преобразованное значение u-го отклика в i-м опыте. Здесь мы применили шкалу, в которой использовано числовое множество из двух элементов (в данном случае 0 и 1). Стандартизовав таким образом шкалу частных откликов, мы подошли ко второму этапу — их обобщению. По какому же правилу следует комбинировать частные отклики?

В ситуации, когда каждый преобразованный частный отклик принимает только два значения 0 и 1, естественно желать, чтобы и обобщенный отклик принимал одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если, и только если, все частные отклики в этом опыте приняли значение 1. А если хотя бы один из откликов обратился в 0, то и обобщенный отклик будет нулем.

При таких рассуждениях для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt{\prod_{u=1}^{n} y_{ui}},$$

где Yi — обобщенный отклик в i-м опыте; $\prod_{u=1}^{n} y_{ui}$ — произведение частных откликов $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$.

Корень мы ввели для того, чтобы связать эту формулу с другой, более сложной, которая будет рассмотрена далее. В данном же случае ничего не изменится, если написать

$$Y_i = \prod_{u=1}^{n} y_{ui}.$$

Очевидно, что такой подход слишком груб и жёсток. Рассмотрим пример.

Пример 2.3

При проектировании нового специального трансформатора малой мощности были заданы следующие основные параметры, определяющие его качество:

- y_1,– масса, кг;
- y_2,– КПД, %;
- y_3,– максимальный перегрев обмотки, град.;
- y_4,– стоимость, руб.

Для каждого частного отклика введем следующие преобразования:

$$y_{1i} = \begin{cases} 1, & если\ y_{1i} < 30 \\ 0, & если\ y_{1i} \geq 30 \end{cases}; \qquad y_{2i} = \begin{cases} 1, & если\ y_{2i} > 85 \\ 0, & если\ y_{2i} \leq 85 \end{cases};$$

$$y_{3i} = \begin{cases} 1, & если\ y_{3i} < 110 \\ 0, & если\ y_{3i} \geq 110 \end{cases}; \qquad y_{4i} = \begin{cases} 1, & если\ y_{4i} < 2500 \\ 0, & если\ y_{4i} \geq 2500 \end{cases}.$$

В результате проведенных расчетов были получены пять вариантов проекта разрабатываемого изделия, отличающихся значениями частных откликов (табл. 2.2.).

Таблица 2.2. Построение обобщенного отклика.

№ опыта	Натуральные частные отклики				Преобразованные частные отклики				Обобщенный параметр
	y_1, кг	y_2, %	y_3, град	y_4, руб	y_1, о.е.	y_2, о.е.	y_3, о.е.	y_4, о.е.	**Y, о.е.**
1	25	83	115	2900	1	0	0	0	**0**
2	27	86	105	2450	1	1	1	1	**1**
3	31	89	102	2490	0	1	1	1	**0**
4	29	88	109	2400	1	1	1	1	**1**
5	33	86	117	2590	0	1	0	0	**0**

Из анализа результатов испытаний (вариантов проекта) следует, что условиям задания отвечают второй и четвертый варианты. Какому из них отдать предпочтение исходя из значения обобщенного отклика? На этот вопрос можно дать ответ лишь прибегнув к экспертной оценке результатов.

Вариант 3 при данном подходе должен быть отвергнут, так как по первому критерию он получил неудовлетворительную оценку, превысив допустимый предел всего на 1 кг (3%). Однако, по остальным параметрам этот вариант вполне конкурентоспособен. Возможно, предельное значение по этому пара-

метру задано слишком жёстко? На эти вопросы данная методика ответов не дает. В этом её недостаток, который может быть преодолен при использовании других алгоритмов построения обобщенного параметра оптимизации.

2.4.2. Функция желательности

Одним из наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности Харрингтона [2]. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение — установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Здесь под физическими параметрами понимаются частные отклики, характеризующие качество исследуемого объекта. Под психологическими параметрами понимаются чисто субъективные оценки экспериментатора желательности (предпочтительности) того или иного значения отклика. Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться готовыми разработанными таблицами соответствий между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой (психологической) системах (табл. 2.3).

Таблица 2.3.Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00-0,80
Хорошо	0,80—0,63
Удовлетворительно	0,63—0,37
Плохо	0,37—0,20
Очень плохо	0,20—0,00

Значение частного отклика, переведенное в безразмерную шкалу желательности, обозначается через d_u (u=1, 2, . . ., n) и называется частной желательностью (от desirable фр. — желательный). Шкала желательности имеет интервал от нуля до единицы. Значение d_u = 0 соответствует абсолютно неприемлемому уровню данного свойства, а

значение d_u = 1 — самому лучшему значению свойства. Понятию «очень хорошо» соответствуют значения на шкале желательности $1 < d_u < 0{,}8$, а понятию «очень *плохо»* — $0{,}20 < d_u < 0{,}0$ и т. д. (рис. 2.2).

Выбор отметок на шпале желательности 0,63 и 0,37 объясняется удобством исчислений:

$0{,}63 \cong 1 - e^{-1}$;

$0{,}37 \cong e^{-1}$.

Значение d_u=0,37 обычно соответствует границе минимально удовлетворительного значения параметра.

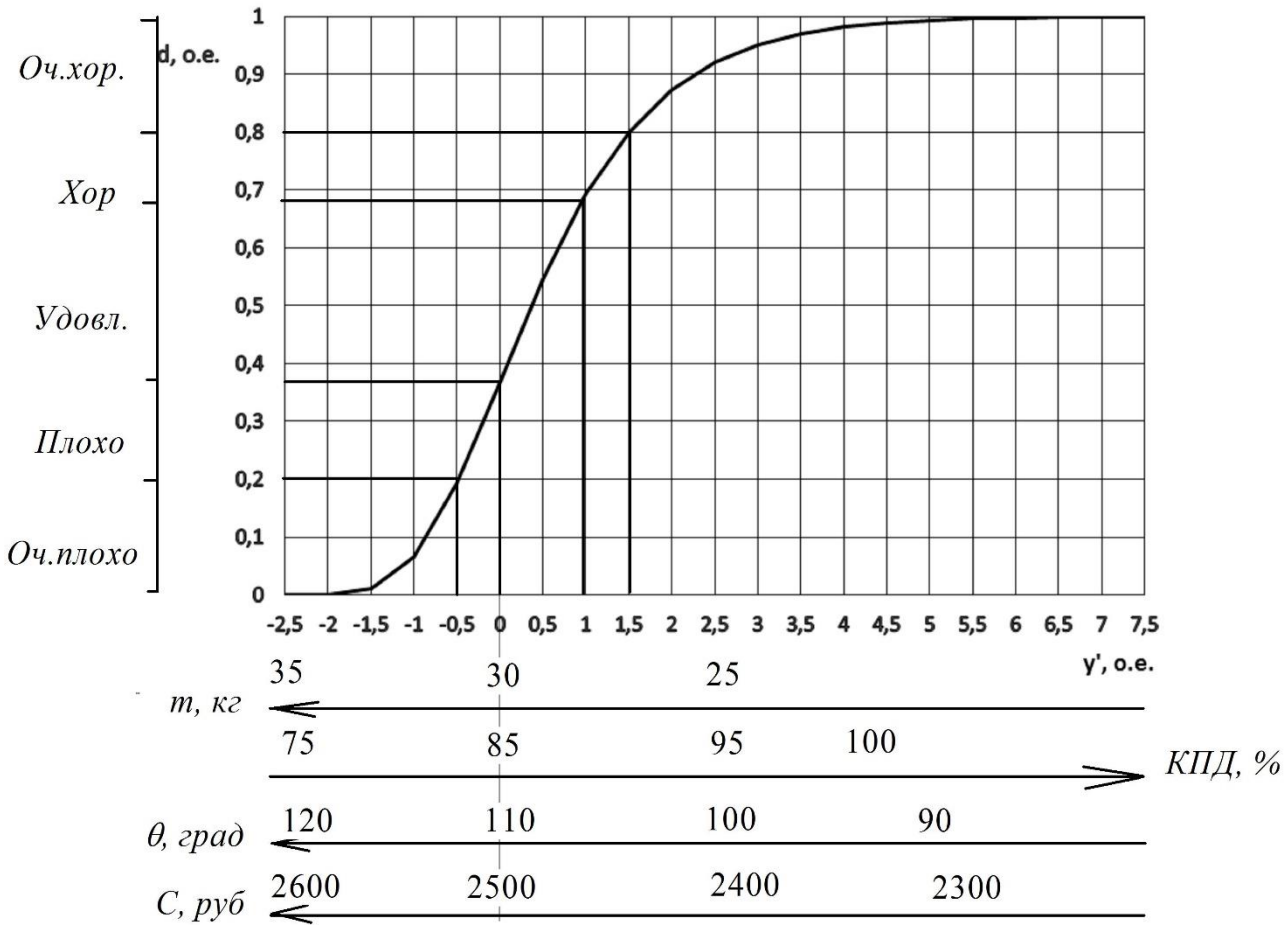


Рисунок 2.2 – Функция желательности Харрингтона.

Функция желательности Харрингтона описывается уравнением

$$d = \exp(-\exp(-y')) \qquad (2.3)$$

или

$$d = e^{-e^{-y'}}.$$

Значение каждого частного отклика y_i для подстановки в уравнение (2.3) необходимо трансформировать в безразмерную величину *y'*:

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i0}}{\Delta y_i} \qquad (2.4)$$

где y_{i0} – минимально удовлетворительное значение соответствующего частного параметра.

Достоинством выражения (2.3) является то, что функция определена на всем диапазоне аргумента от -∞ до +∞, обладает такими полезными свойствами как непрерывность, монотонность и гладкость. Кроме того, эта кривая хорошо передает тот факт, что в областях желательностей, близких к 0 и 1, «чувствительность» ее существенно ниже, чем в средней зоне.

Пример 2.3 *(продолжение)*.

В таблице 2.4 приведены результаты расчета значений частных параметров по шкале желательности Харрингтона и значения обобщенных параметров оптимизации, рассчитанных в виде среднего арифметического и среднего геометрического для примера, приведенного выше.

$$Y_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

$$Y_\Pi = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_j}$$

Таблица 2.4. Значения обобщенного параметра для Примера 3.

№	*y1,o.e.*	*y2,o.e.*	*y3,o.e.*	*y4,o.e.*	*d1, o.e.*	*d2, o.e.*	*d3, o.e.*	*d4, o.e.*	***YΣ, o.e.***	***Yп, o.e.***
1	2,5	0,5	-1,25	-10	0,921	0,545	0,030	0,000	**0,374**	**0,000**
2	1,5	-0,25	1,25	1,25	0,800	0,277	0,751	0,751	**0,645**	**0,594**
3	-0,5	-1	2	0,25	0,192	0,066	0,873	0,459	**0,398**	**0,267**
4	0,5	-0,75	0,25	2,5	0,545	0,120	0,459	0,921	**0,511**	**0,408**
5	-1,5	-0,25	-1,75	-2,25	0,011	0,277	0,003	0,000	**0,073**	**0,005**

Анализ значений обобщенного отклика, независимо от алгоритма его построения, дает однозначный ответ, что вариант №2 является оптимальным для поставленной задачи.

3. Полный факторный эксперимент

Классический метод исследования объектов и процессов основан на изучении механизмов протекающих в изучаемом объекте явлений различной физической природы [1, 2, 5, 8, 12]. Основной целью данного метода является логическое описание и объяснение протекающих процессов с точки зрения объективных физических законов с последующим получением математических уравнений (интегральных, дифференциальных или алгебраических) составляющих математическую модель объекта. Под математической моделью обычно понимают систему уравнений, описывающих физические процессы, протекающие в объекте. Полученная математическая модель применяется для создания методик расчета объекта при его проектировании, конструировании и реализации в производстве.

Существует и иной подход к изучению объектов основанный на результатах эксперимента – метод «чёрного ящика», который был описан в предыдущих главах. Этот метод не требует изучения механизмов протекающих в объекте процессов. Исследователь рассматривает функциональную структуру объекта как «черный ящик». Его больше не интересуют закономерности внутренних процессов объекта. Главное в исследовании это построение математической зависимости выходного параметра (параметров) от значений варьируемых переменных (факторов) по результатам эксперимента. В процессе экспериментального исследования объекта, явления или в процессе логических рассуждений о процессах, происходящих в данном объекте обнаруживается, что интересующая нас функция (некоторое качество, свойство или признак объекта, процесса) «***y***» зависит от ряда величин, параметров (факторов) данного объекта «$x_1, x_2, \ldots x_j, \ldots x_к$». Естественно, возникает желание получить характер этих зависимостей, лучше в математической форме. Иными словами, возникает желание получить функцию нескольких переменных, которую в явном виде опираясь на фундаментальные законы получить невозможно:

$$y = f(x_1, x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_к). \quad . \quad (3.1)$$

Можно провести ряд опытов, в каждом из которых все факторы принимают значения в заданном интервале и экспериментально определить соответствующее значение функции ***y***, называемой *параметром цели*. По результатам экспериментального исследования составляется табл. 3.1.

Таблица 3.1 Таблица эксперимента

Номера опытов	Факторы					Показатель цели
	x_1	x_2	x_3	…	x_K	
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	…	x_{K1}	Y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{31}	…	x_{K2}	Y_2
…	…	…	…	…	…	…
N	x_{1N}	x_{2N}	x_{3N}	…	x_{KN}	Y_N

В этой таблице жирной линией обведен прямоугольник, называемый в литературе *матрицей планирования эксперимента*, в которой любая строка представляет собой значения всех факторов в соответствующем опыте, а любой столбец – значения одного из факторов во всех опытах.

В табл.3.1 содержится объективная информация о свойствах объекта исследования, определяющих зависимость параметра цели ***y*** от факторов $\boldsymbol{x_j}$ по формуле (3.1).

Эта информация содержится в неявной форме. Информацию о свойствах объекта можно получить и определить зависимость (3.1) применением специальной математической обработки результатов эксперимента.

Очевидно, что описанный метод прост с методологической точки зрения, не требует очень глубоких знаний об объекте исследования, его свойств. Достаточно лишь определить перечень существенных параметров, определяющих объект, и установить, что может служить показателем или параметром цели при исследовании объекта. Как уже отмечалось, при таком подходе, не устанавливая механизма взаимодействия факторов $\boldsymbol{x_1,x_2,\ldots,\ldots,x_j,\ldots,x_K}$ и их влияния на параметр цели ***y***, исследователь может экспериментально определить зависимость (3.1).

Этот метод может применяться и при проведении компьютерного эксперимента, при котором исследуется не сам физический объект, а его математическая модель – система уравнений.

Существует ряд исследовательских задач для которых метод планирования эксперимента показал свою эффективность: задачи идентификации, отсеивания, определения оптимального состава. Наибольшее распространение этот метод получил при решении задач оптимизации.

Задача оптимизации, связана с определением оптимальных условий, при которых протекает технологический процесс или определение оптимальных значений параметров электромеханического или иного технического устройства, при которых какой-то заранее выбранный исследователем важный показатель достигает максимального (минимального) значения. В каждом конкретном случае задача формулируется конкретно с указанием границ, допущений и ограничений при её решении.

В качестве примеров приведем использование метода планирования эксперимента при решении задач оптимизации новых электромеханических преобразователей энергии.

Пример 3.1. Расчет оптимальных значений диаметра проводника обмотки якоря, индукции в воздушном зазоре, ширины полюса статора, плотности тока в обмотке возбуждения для обеспечения минимальной массы исполнительного двигателя постоянного тока с гладким якорем. Ограничения заданы максимальным перегревом обмоток, требованием обеспечения параметров быстродействия и технологичности конструкции.

Пример 3.2. Определение оптимальных значений индукции в зазоре, числа слоев обмотки, размеров магнитов обеспечивающих минимум потребляемой мощности моментного двигателя с ограниченным углом поворота ротора при заданных габаритах и перегревах обмоток.

Как правило, при решении задачи оптимизации реальных объектов параметров определяющих качество объекта имеется несколько. Однако, как отмечалось ранее, оптимизировать объект или процесс одновременно по нескольким критериям не представляется возможным. Поэтому в дальнейшем, мы будем рассматривать однокритериальную оптимизацию, где определен главный параметр оптимизации.

Он может быть представлен или в виде обобщенного параметра, или в виде наиболее важного показателя, когда остальные показатели задаются в качестве ограничений.

Значения варьируемых переменных (факторов), при которых главный параметр цели принимает максимальное (минимальное) значение при условии, что параметры ограничения имеют значения, не выходящие за допустимые пределы называются оптимальными.

3.1. Математические основы планирования эксперимента.

Главная проблема при планировании эксперимента заключается в выборе значений факторов при проведении эксперимента, в последовательности их чередования при переходе от одного опыта к другому. Данная проблема имеет принципиальное значение, так как от способа варьирования значений факторов зависит точность оценки степени влияния отдельных факторов в многофакторном эксперименте на параметр цели, а также время проведения эксперимента. Матрица планирования эксперимента должна составляться *по некоторой особой схеме*, только в этом случае удастся в «чистом виде» выявить зависимость параметра цели от каждого фактора. Как видно из табл. 3.1, при одновременном изменении значений факторов в различных опытах изменения параметра цели обусловлены влиянием сразу всех факторов. Математической обработкой результатов эксперимента необходимо из смешанной информации выделить информацию о влиянии отдельных факторов, а это, как следует из теории эксперимента возможно не при всяком способе составлении матрицы планирования.

Предположим, что проводится исследование влияния на функцию (параметр цели) ***y*** только одной независимой переменной ***x***. В этом случае, задача является достаточно простой: задавая несколько значений ***x,*** можно построить график $y = f(x)$. Можно считать, что цель достигнута.

Если независимых переменных две, то задача заметно усложняется. В этом случае необходимо экспериментально определить и построить два больших семейства кривых: $y = f(x_1)$ при $x_2 = \text{const}$., и $y =$

$f(x_2)$ при x_1 = const. Иногда, для полученных такого множества графиков удаётся подобрать аналитическое выражение, пользуясь достаточно сложными алгоритмами аппроксимации этих графиков.

Если же независимых переменных три, четыре или более, то такую задачу решить сложно. Построение большого числа графиков является на практике громоздким и бесполезным делом, так как извлечение полезных сведений из множества графиков требует большого времени, терпения и высокого уровня креативности от исследователя.

Если модель исследуемого объекта при числе независимых переменных три и более традиционное исследование бесполезно, остаётся только один выход, состоящий в том, что при определении искомой зависимости (3.1) рассматривается и составляется не сама функция, а её разложение в какой-либо ряд. Это и есть начало математической теории планирования эксперимента или начало нового подхода к экспериментальному исследованию.

Математической основой теории планирования эксперимента является регрессионный анализ, сущность которого состоит в следующем.

Пусть необходимо найти зависимость параметра цели y от факторов исследуемого объекта $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_j, \ldots, x_к$. Как правило, аналитическое выражение функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_j, \ldots, x_к)$ неизвестно, поэтому ее приходится представлять полиномом вида

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i\, x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}\, x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} b_{ij}\, x_i\, x_j + \cdots \qquad (3.2)$$

с коэффициентами регрессии b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}.

На практике всегда ограничивают число членов разложения, аппроксимируя тем самым неизвестную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_j, \ldots, x_к)$ полиномом некоторой степени.

Следующим шагом для решения поставленной задачи необходимо задать несколько сочетаний независимых переменных

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_j, \ldots, x_к$, определить функцию цели y для всех наборов факторов и попытаться использовать полученную информацию для оценок коэффициентов *регрессии* b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}. Если после проделанной работы проверка покажет, что сформированный ряд, хорошо согласуется с данными опытов, выполненных не только для принятых факторов, но и для любых дополнительных, то можно считать, что цель достигнута.

Однако, чтобы считать себя полностью готовым к применению теории планирования эксперимента в своём исследовании необходимо вначале ответить на ряд вопросов, которые представляют те «подводные камни» без решения которых применение данного подхода в эксперименте, невозможно.

1). Что нам известно о функции (3.1), какое сочетание факторов и сколько таких сочетаний следует составить для определения значений функции цели y?

2). Как определить коэффициенты регрессии b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}, чтобы аппроксимирующий ряд (3.2) как можно более адекватно соответствовал функции (3.1)?

3). Как оценить точность представления функции цели предлагаемым полиномом?

Как уже было отмечено для изучения влияния переменных $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_j, \ldots, x_к$, которые в теории планирования эксперимента называют *факторами*, на функцию цели и проводят планирование эксперимента. Самое важное в планировании состоит в том, что исследователь может изменять факторы по своему усмотрению. Это и есть основная идея *планирования эксперимента.* Хорошее математическое описание исследуемого объекта или явления можно получить, если есть возможность при работе с объектом самостоятельно определённым образом задавать сочетания факторов. В этом случае, совокупность действий над объектом, позволяющим получать значения функции цели y, называется *активным экспериментом.* Следовательно, процесс проектирования электромеханического устройства (например, определение главных размеров электрической машины в зависимости от ряда входных параметров), можно называть *актив-*

ным экспериментом, входные параметры – *факторами*, а *функцией цели* назовём геометрические размеры машины, например её объём.

Встречаются области научных исследований, в которых невозможно управлять факторами (например, астрономия). Такая ситуация соответствует *пассивному эксперименту.* Несмотря на то, что такие ситуации в технике встречаются достаточно часто, в данной работе мы будем рассматривать лишь активный эксперимент, в котором существует возможность менять факторы по своему усмотрению.

Прежде чем приступить к планированию, попытаемся дать ответы на вопросы, поставленные ранее. Прежде всего, как выбрать локальную область факторного пространства, где ее выбирать и какого размера она должна быть? Это важный этап принятия неформализованных решений, предшествующих построению плана первой серии эксперимента.

Здесь мы впервые сталкиваемся с проблемой принятия решений при планировании эксперимента. Далее мы уже не расстанемся с. этой темой. Весь процесс исследования можно считать состоящим из последовательности этапов, часть из которых полностью формализована, а часть требует «интуитивных» решений. Причем, по мере развития теории формальные этапы будут играть все большую роль, но до конца не вытеснят неформализованные этапы.

3.2.Принятие решений перед планированием эксперимента

При выборе области эксперимента прежде всего надо оценить границы областей определения факторов. При этом должны учитываться ограничения нескольких типов. Первый тип — принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах. Например, если фактор – температура, то нижним пределом будет абсолютный нуль. Второй тип — ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями, например, со стоимостью материалов или компонентов,– обмотку трансформатора не делают из серебра. Третий тип ограничений, с которым чаще всего приходится иметь дело, определяется кон-

кретными условиями проведения процесса, например, существующей аппаратурой, технологией, организацией. В асинхронном электродвигателе не рационально делать воздушный зазор между статором и ротором меньше некоторого обоснованного предела, определяемого уровнем технологии и точности изготовления узлов двигателя.

Оптимизация обычно начинается в условиях, когда объект уже подвергался некоторым исследованиям. Информацию, содержащуюся в результатах предыдущих исследований, называют «априорной» (т. е. полученной до начала эксперимента). Мы можем использовать априорную информацию для получения представления о параметре оптимизации, о факторах, о наилучших условиях ведения процесса и характере поверхности отклика, т. е. о том, как сильно меняется параметр оптимизации при изменениях значений факторов, а также о кривизне поверхности. Для этого можно использовать графики (или таблицы) однофакторных экспериментов, осуществлявшихся в предыдущих исследованиях или описанных в литературе. Если однофакторную зависимость нельзя представить линейным уравнением (в рассматриваемой области), то в многомерном случае, несомненно, будет существенная кривизна. Обратное утверждение, к сожалению, не очевидно.

Итак, *выбор экспериментальной области факторного пространства связан с тщательным анализом априорной информации*.

Поясним эти рассуждения на ***Примере3.1*** из предыдущего раздела.

Расчет оптимальных значений диаметра проводника обмотки якоря, индукции в воздушном зазоре, ширины полюса статора, плотности тока в обмотке возбуждения для обеспечения минимальной массы исполнительного двигателя постоянного тока с гладким якорем.

В этом примере четыре варьируемых переменных (фактора). Каждому из них соответствует своя область определения, заданная исходя из опыта проектирования и физических ограничений.

Диаметр проводника выбирался из интервала 0,018 – 2,0 мм. Нижний предел определяется минимальным диаметром провода, выпускаемым промышленностью, а верхний – технологическими ограничениями.

Значения индукции в зазоре варьировались от 0,15 Тл до 1,2 Тл. Эти пределы определялись опытом проектирования подобных машин, причем, для то-

го, чтобы не упустить возможное оптимальное значение из-за узости интервала по этому фактору, интервал был заметно расширен.

Максимальные значения плотности тока ограничивались фактором перегрева обмоток, минимальное – опытом проектирования.

Выбор области определения факторов – это только начало. В области определения надо найти локальную подобласть для планирования эксперимента. Процедура выбора этой подобласти включает два этапа: выбор основного уровня и выбор интервалов варьирования.

Выбор основного уровня. Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует комбинация (или несколько комбинаций) уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Её можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Назовем ее *основным (нулевым) уровнем*.

Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня.

В разных случаях мы располагаем различными сведениями об области наилучших условий. Если имеются сведения о координатах одной наилучшей точки и нет информации о границах определения факторов, то остается рассматривать эту точку в качестве основного уровня. Аналогичное решение принимается, если границы известны и наилучшие условия лежат внутри области.

Положение усложняется, если эта точка лежит на границе (или весьма близко к границе) области. Тогда приходится основной уровень выбирать с некоторым сдвигом от наилучших условий.

Может случиться, что координаты наилучшей точки неизвестны, но есть сведения о некоторой подобласти, в которой процесс идет достаточно хорошо. Тогда основной уровень выбирается либо в центре, либо в случайной точке этой подобласти. Сведения о подобласти можно получить, анализируя изученные ранее подобные процессы, из теоретических соображений или из предыдущего эксперимента.

Наконец, возможен случай с несколькими эквивалентными точками, координаты которых различны. Когда отсутствуют дополнительные данные (технологического, экономического характера и т. д.), выбор произволен. Конечно, если эксперимент недорог и требует

немного времени, можно приступить к построению планов экспериментов вокруг нескольких точек. Это соображение справедливо, обычно, и для расчётных экспериментов.

После того как нулевой уровень выбран, переходим к следующему шагу — выбору интервалов варьирования.

Выбор интервалов варьирования. Теперь наша цель состоит в том, чтобы для каждого фактора выбрать два уровня, на которых он будет варьироваться в эксперименте.

Представьте себе координатную ось, на которой откладываются значения данного фактора, для определенности — температуры. Пусть основной уровень уже выбран и равен 100° С. Это значение изображается точкой. Тогда два интересующих нас уровня можно изобразить двумя точками, симметричными относительно первой. Будем называть один из этих уровней верхним, а второй — нижним. Обычно за верхний уровень принимается тот, который соответствует большему значению фактора, хотя это не обязательно, а для качественных факторов вообще безразлично.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание — нижний уровни фактора.

Другими словами, *интервал варьирования — это расстояние на координатной оси между основным(нулевым) и верхним (или нижним) уровнем.* Таким образом, задача выбора уровней сводится к более простой задаче выбора интервала варьирования. Заметим еще, что для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень соответствовал +1 нижний -1, а основной — нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{\Delta x_i}$$

где x_j — кодированное значение фактора, $\tilde{x}_j$— натуральное значение фактора, $\tilde{x}_{j0}$— натуральное значение основного уровня, Δx_i — интервал варьирования, j — номер фактора.

Для качественных факторов, имеющих два уровня, один уровень обозначается +1, а другой –1; порядок уровней не имеет значения.

Рассмотрим свойства полинома (3.2), который близок по свойствам к разложению функции в степенной ряд Тейлора [15].

Для ряда Тейлора коэффициенты регрессии определяются соответственно как

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad b_{ii} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

Коэффициенты регрессии полинома (3.2) могут быть вычислены путем математической обработки результатов эксперимента, записанных в табл. 3.1, методом наименьших квадратов. Для этого необходимо полином (3.2) записать как однородное линейное уравнение в следующем виде

$$\hat{y} = b_0\, x_0 + b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_{k`}\, x_{k`} == \sum_{i=0}^{k`} b_i\, x_i \qquad (3.3)$$

Для определения коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов необходимо минимизировать сумму квадратов отклонений [15]

$$S_R = \sum_{U=1}^{N} (y_u - b_0\, x_{0u} - b_1\, x_{1u} - b_2\, x_{2u} - \cdots b_{k`}\, x_{k`u})^2$$

Для определения коэффициентов регрессии, необходимо решить систему нормальных уравнений. Предварительно определяются по данным табл.3.1. коэффициенты (ii) и (ij) системы уравнений и свободные члены (iy). Коэффициенты (ii) и (ij), как видно из выражений (2.5), являются скалярными произведениями вектор - столбцов матрицы планирования эксперимента (табл.3.1), номера которых соответствуют числам i и j. Свободные члены (iy) представляют собой

скалярные произведения вектор - столбцов факторов с номером i на вектор - столбец значений y.

Коэффициенты регрессии не могут быть определены независимо друг от друга. Физически это означает, что каждый коэффициент b_i не характеризует «чистое» влияние соответствующего фактора x_i на y, а несет в себе информацию о влиянии всех факторов. Действительно, в каждом уравнении системы имеются члены, содержащие все факторы. В такой ситуации уравнение можно рассматривать как формулу для вычислений значений y по известным значениям x_i. Ничего нельзя сказать о степени влияния каждого фактора на y. Результаты исследования оказываются весьма ограниченными.

От этого недостатка можно избавиться, если эксперимент планировать по некоторой схеме, составленной так, чтобы в матрице планирования скалярные произведения пар вектор - столбцов были равны нулю ($\sum_{u=1}^{N} x_{iu} \times x_{ju} = 0$). Векторы, скалярные произведения которых равны нулю, называются ***ортогональными***. Поэтому и план эксперимента, при котором скалярные произведения вектор - столбцов равны нулю, называется ортогональным. Очевидно, что при ортогональном планировании эксперимента все недиагональные коэффициенты системы нормальных уравнений будут равны нулю и система уравнений распадется на k'+1 независимых уравнений. Коэффициенты регрессии будут вычисляться независимо друг от друга по формуле

$$b_i = (iy)/(ii) = (\sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u) / \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 \qquad (3.4)$$

Это значит, что каждый коэффициент регрессии b_i в зависимости (3.3) характеризует степень влияния соответствующего фактора x_i на y. Следовательно, найденная по результатам эксперимента зависимость может использоваться для анализа свойств объекта исследования и управления им.

Следовательно, планировать физический или компьютерный эксперимент надо так, чтобы ***матрица планирования эксперимента была ортого*нальной.** Это *основополагающее условие* для исследова-

ния многофакторных объектов. Предметом теории планирования эксперимента при решении оптимизационных задач является процесс построения ортогональных планов эксперимента.

3.3 Матрица полного факторного эксперимента.

Полный факторный эксперимент (сокращенно ПФЭ) позволяет построить математическую модель исследуемого объекта в форме линейного многочлена вида [2]

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{K} b_i \; x_i, \qquad (3.5)$$

или неполного квадратичного многочлена вида

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{K} b_i \; x_i + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} \; x_i \, x_j \qquad (3.6)$$

Для отыскания коэффициентов регрессии b_i линейной функции (3.1) достаточно в эксперименте определить значения y при двух значениях каждого фактора x_i. Поэтому в планах ПФЭ каждый фактор варьируется только на двух уровнях – верхнем и нижнем. Такие планы называются линейными. В этом случае, если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Простая формула, которая для этого используется, уже приводилась в гл. 1, и мы ее напомним:

$N = 2^k$,

где N - число опытов, k ~ число факторов, 2 - число уровней.

В общем случае *эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется* ***полным факторным, экспериментом*** (ПФЭ).

Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа 2^k.

Для полного факторного эксперимента с двумя факторами, варьируемыми на двух уровнях, нетрудно написать все возможные соче-

тания уровней (табл. 3.2). Напомним, что в планировании эксперимента используются кодированные значения факторов: **+1** и **-1** (часто для простоты записи единицы опускают). Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы - значениям факторов. Будем называть такие таблицы *матрицами планирования эксперимента*.

Таблица 3.2. Матрица планирования эксперимента 2^2.

№ опыта	x_1, *о.е.*	x_2, *о.е.*	*y*
1	+1	+1	*y1*
2	-1	+1	*y2*
3	+1	-1	*y3*
4	-1	-1	*y4*

Этой матрице соответствует иллюстрация на рис.3.1.

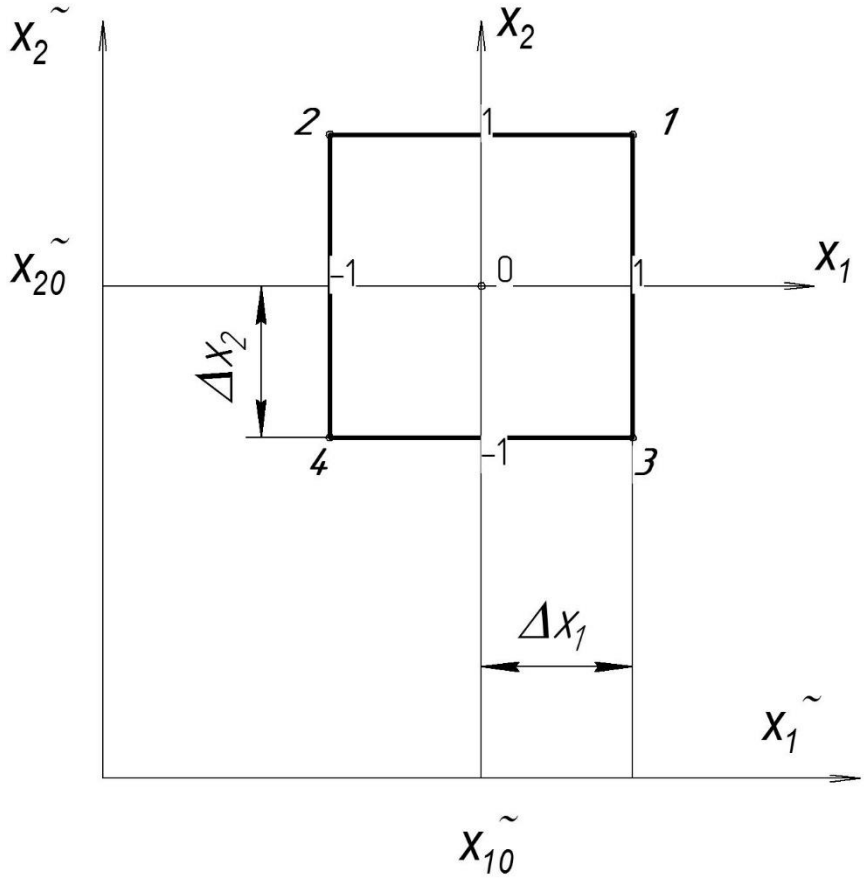


Рисунок 3.1. – Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^2.

Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку - вектор-строкой. Таким образом, в табл. 3.1 мы имеем два вектора-столбца независимых переменных и один

вектор-столбец параметра оптимизации. То, что записано в этой таблице в алгебраической форме, изображено геометрически на рис.3.1. Найдем в области определения факторов точку 0, соответствующую основному уровню, и проведем через нее новые оси координат x_1, x_2, параллельные осям натуральных значений факторов $x_1^{\sim}$, $x_2^{\sim}$. Далее, выберем масштабы по новым осям так, чтобы интервал варьирования Δx_1, Δx_2 для каждого фактора равнялся единице. Тогда условия проведения опытов будут соответствовать вершинам квадрата, центром которого является основной уровень $x_{10}^{\sim}$, $x_{20}^{\sim}$, а каждая сторона параллельна одной из осей координат и равна двум интервалам. Номера вершин квадрата соответствуют номерам опытов в матрице планирования. Площадь, ограниченная квадратом, называется областью эксперимента.

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти прямым перебором (или просто запомнить), то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц.

Один из приемов основан на правиле чередования знаков. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через два, в третьем - через 4, в четвертом - через 8 и т. д. по степеням двойки. Этот способ применим для матриц любой размерности. Иллюстрация этого метода показана в табл.3.3.

Таблица 3.3. Матрица ПФЭ 2^3.

№ опыта	x_1	x_2	$x3$	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	-	-	+	y_4
5	+	+	-	y_5
6	-	+	-	y_6
7	+	-	-	y_7
8	-	-	-	y_8

В таблице 3.3 в обозначении верхнего и нижнего уровней факторов единица опущена.

По аналогии с полным фанторным экспериментом 2^2 можно дать геометрическую интерпретацию полного факторного эксперимента 2^3. Геометрической интерпретацией полного факторного энспримента 2^3 служит куб, координаты вершин которого задают условия опытов. Куб задает область эксперимента, а центр куба является его центром.

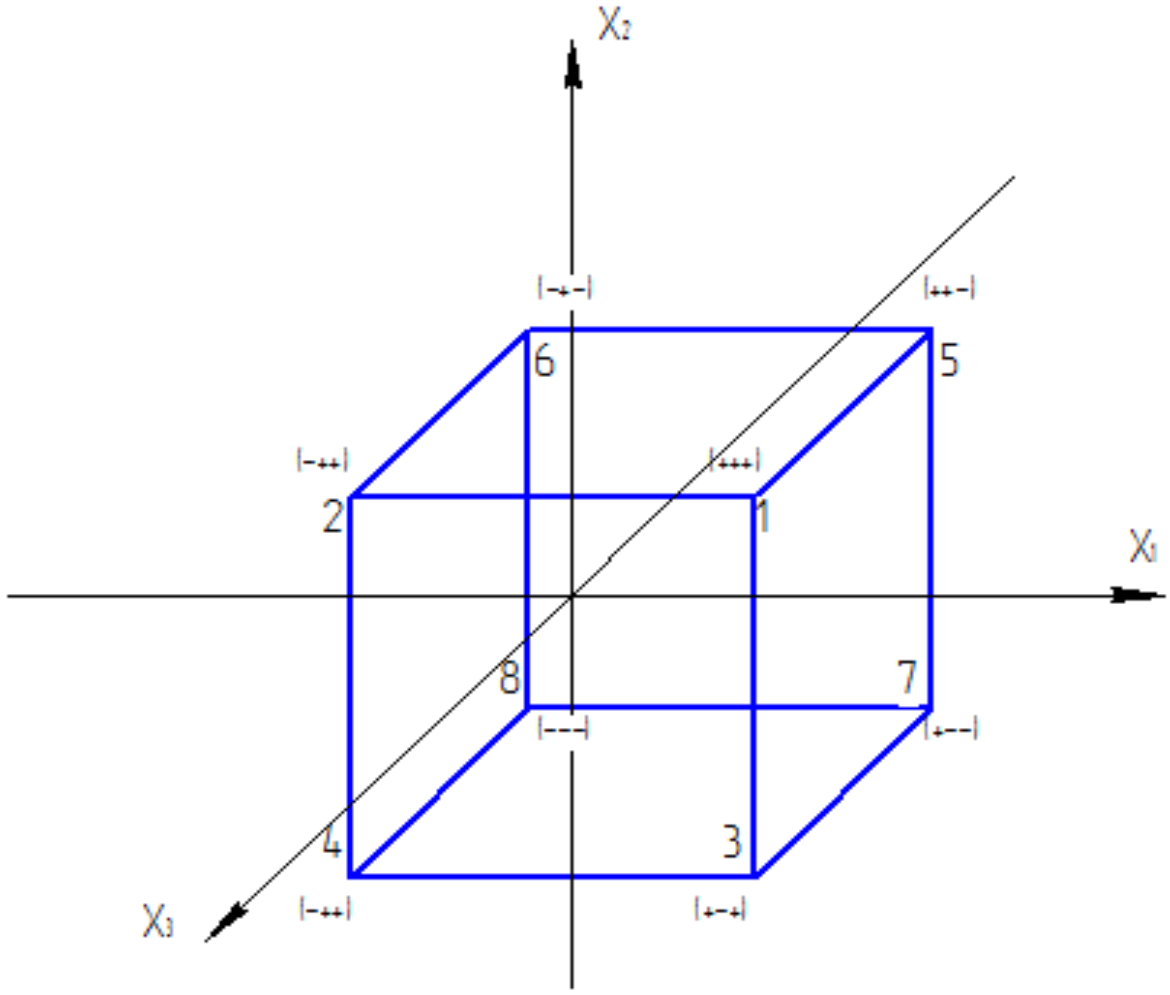


Рисунок 3.3– Экспериментальные точки в факторном пространстве кодовых факторов 2^3.

Для числа факторов, более трех, область эксперимента задается в многофакторном пространстве *гиперкубом*, изобразить который на плоскости невозможно.

Отметим, что указанный метод построения матрицы ПФЭ не единственный. Существует несколько равноценных способов ее построения [2].

3.4. Свойства матрицы полного факторного эксперимента

Независимо от того, каким способом построены матрицы ПФЭ, они должна отвечать общим требованиям, независимо от их размерности. Ведь эксперимент планируется для того, чтобы получить модель, обладающую некоторыми оптимальными свойствами. Это значит, что оценки коэффициентов модели должны быть наилучшими и что точность предсказания параметра оптимизации не должна зависеть от направления в факторном пространстве, ибо заранее неясно, куда предстоит двигаться в поисках оптимума.

Первое свойство *- симметричность относительно центра эксперимента - формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю.*

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0,$$

где *j* – номер фактора, *N* – число опытов, *i* – номер опыта.

Второе свойство *– условие нормировки – формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов*

$$\sum_{i=1}^{N} x^2{}_{ji} = N.$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются +1 и -1.

Мы рассмотрели свойства отдельных столбцов матрицы планирования. Теперь остановимся на свойстве совокупности столбцов.

Третье свойство*: сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю*

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot x_{ui} = 0,$$

где *j*, *u* – номера двух любых вектор-столбцов.

Это важное свойство называется ортогональностью матрицы планирования.

Четвертое свойство *называется ротатабельностью, т. е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимиаации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.*

Проверку соответствия матриц 2^2 и 2^3 из таблиц 3.2 и 3.3 требованиям, предъявляемым к матрицам ПФЭ предлагаем читателям провести самостоятельно.

3.5. Полный факторный эксперимент и математическая модель

Задачей, стоящей перед экспериментатором, является отыскание оптимальных значений факторов, при которых параметр оптимизации достигает оптимального (максимального или минимального, в зависимости от постановки задачи), значения. Для отыскания этой точки на поверхности отклика служит математическая модель. Простейшим видом математической модели является линейная (3.3 или 3.5). Проведенная серия опытов ПФЭ позволяет определить оценки коэффициентов математической модели (3.3) b_j по простой формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i}{N}, \quad j = 0,1, \dots, k \qquad (3.7)$$

В качестве примера запишем эту формулу для матрицы 2^2, представленной в таблице 3.2

$$b_1 = \frac{(+1) \cdot y_1 + (-1) \cdot y_2 + (+1) \cdot y_3 + (-1) \cdot y_4}{4};$$

$$b_2 = \frac{(+1) \cdot y_1 + (+1) \cdot y_2 + (-1) \cdot y_3 + (-1) \cdot y_4}{4}.$$

Свободный член уравнения (3.3) рассчитывается как среднее арифметическое значений y_i

$$b_0 = \frac{(+1)\cdot y_1 + (+1)\cdot y_2 + (+1)\cdot y_3 + (+1)\cdot y_4}{4}.$$

Аналогично можно рассчитать и коэффициенты линейной модели для случая, когда число факторов больше двух. Для этого в предыдущих формулах в числителе суммируются значения параметра оптимизации, взятые со знаками элементов вектор-столбца матрицы ПФЭ для соответствующего фактора и сумма делится на число опытов. В качестве примера запишем формулу для расчета b_3 матрицы 2^3 таблицы 3.3.

$$b_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8}{8}.$$

Геометрическая интерпретация уравнения 3.3 заключается в том, что математическая модель для двухфакторного эксперимента представляет собой уравнение плоскости, касательной к поверхности отклика в точке нулевого уровня, а коэффициенты b_j – коэффициенты наклона этой плоскости к соответствующим координатным осям.

Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Планируя эксперимент, на первом этапе мы стремимся получить линейную модель. Однако нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования процесс описывается линейной моделью. Существуют способы проверки пригодности линейной модели [2]. Если модель нелинейна, то можно количественно оценить нелинейностъ, пользуясь данными, полученными в ходе ПФЭ.

Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на котором нахо-

дится другой фактор. В этом случае говорят, что имеет место эффект взаимодействия двух факторов. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов. При вычислении коэффициента, соответствующего эффекту взаимодействия, с новым вектор-столбцом можно обращаться так же, как с вектор-столбцом любого фактора. Для полного факторного эксперимента 2^2 матрица планирования с учетом эффекта взаимодействия представлена в табл. 3.4. Очень важно, что при добавлении столбцов эффектов взаимодействий все рассмотренные свойства матриц планирования должны сохраняться.

Таблица 3.4. Матрица планирования эксперимента 2^2 с эффектом взаимодействия.

№ опыта	x_1, *о.е.*	x_2, *о.е.*	$x_1 x_2$, *о.е.*	y
1	+1	+1	+1	*y1*
2	-1	+1	-1	*y2*
3	+1	-1	-1	*y3*
4	-1	-1	+1	*y4*

Теперь модель выглядит следующим образом

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

Коэффициент b_{12} вычисляется обычным путем

$$b_{12} = \frac{(+1) \cdot y_1 + (-1) \cdot y_2 + (-1) \cdot y_3 + (+1) \cdot y_4}{4}$$

Столбцы x_1 и x_2 задают планирование - по ним непосредственно определяются условия опытов, а столбец $x_1 x_2$ служит только для расчета.

Обращаем ваше внимание на то, что при оптимизации мы стремимся сделать эффекты взаимодействия возможно меньшими. В

задачах интерполяции, напротив, их выявление часто важно и интересно.

Поясним физический смысл эффекта взаимодействия следующим примером. Пусть на некоторый химический процесс влияют два фактора: температура и время реакции. В области низких температур увеличение времени увеличивает выход продукта. При переходе в область высоких температур эта закономерность нарушается. Здесь, напротив, необходимо уменьшать время реакции. Это и есть проявление эффекта взаимодействия.

Ортогональность матрицы планирования позволяет получить независимые друг от друга оценки коэффициентов. Это означает, что величина любого коэффициента не зависит от того, какие величины имеют другие коэффициенты.

Однако сформулированные выше утверждения справедливы лишь в том случае, если модель включает только линейные эффекты и эффекты взаимодействия. Между тем существенными могут оказаться коэффициенты при квадратах факторов, их кубах и т. п. В этом случае приходится переходить к планам и моделям более высокого порядка [15]. Эти методы выходят за рамки настоящего пособия.

В заключение к настоящей главе отметим основные моменты, связанные с планированием и проведением полного факторного эксперимента.

Первой серии опытов предшествует этап неформализованных решений, направленных на выбор локальной области факторного пространства. При этом оцениваются границы областей определения факторов, задаваемые либо принципиальными ограничениями, либо технико-экономическими соображениями, либо конкретными условиями проведения процесса. Установление области связано с тщательным анализом априорной информации об изменении параметра оптимизации и о кривизне поверхности отклика.

Локальная область проведения эксперимента выбирается в два этапа: определение основного уровня и интервалов варьирования. Основной (нулевой) уровень - многомерная точка в факторном пространстве, задаваемая комбинацией уровней факторов. Построение

плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно основного уровня.

При установлении основного уровня приходится рассматривать различные ситуации. Ситуации задаются информацией о наилучших точках и определяют решения.

Следующий этап - выбор интервалов варьирования факторов. Для каждого фактора определяются два уровня, на которых он варьируется в эксперименте. Уровни факторов изображаются двумя точками на координатной оси, симметричными относительно основного уровня. Один из уровней - верхний, другой - нижний. Интервалом варьирования фанторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровень.

Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям задают так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, основной – нулю.

На выбор интервалов варьирования накладываются ограничения снизу (он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора) и сверху (верхний или нижний уровни не должны выходить за область определения).

В задачах оптимизации выбирают подобласть, которая давала бы возможность реализовать шаговую процедуру движения к оптимуму.

При определении интервала варьирования используется информация о точности, с которой фиксируются значения факторов, о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации. Для принятых градаций этих признаков существует несколько различных ситуаций. Низкая точность фиксирования факторов определяет типичное решение - широкий интервал варьирования. Для средней точности характерен выбор среднего интервала. Высокая точность обычно приводит либо к узкому, либо к среднему интервалам. В задачах численного моделирования и оптимизации на математических моделях интервал варьирования выбирается минимальным.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней, называется полным факторным экспериментом. Если число уровней равно двум, то это полный факторный эксперимент типа 2^k. Условия эксперимента представляют в виде таблицы – матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Геометрическая интерпретация полных факторных планов: план 2^2 задается координатами вершин квадрата, план 2^3 - координатами вершин куба, при $k > 3$ - координатами вершин гиперкуба.

Полный факторный эксперимент типа 2^k обладает свойствами симметричности, нормировки, ортогональности, ротатабельности (для линейной модели).

Коэффициенты, вычисленные по результатам эксперимента, указывают на силу влияния факторов. В тех случаях, когда эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор, говорят о наличии эффекта взаимодействия двух факторов. Для его количественной оценки получают столбец произведений этих факторов и обращаются с ним как с вектор-столбцом любого фактора.

3.6 Рандомизация опытов в плане эксперимента

После того как план эксперимента составлен (полный или дробный), его необходимо реализовать. При этом последовательность выполнения опытов не должна соответствовать нумерации их в плане. Опыты необходимо «перемешать» так, чтобы обеспечивалась случайная последовательность их выполнения. Это необходимо для исключения влияния на результаты эксперимента изменения во времени неконтролируемых факторов, не включенных в число независимых переменных. Приведём конкретный пример, представленный в [5].

Пусть исследуется некоторый технологический процесс с параметрами x_1, x_2, x_3 влияющими на выходную характеристике y. Составим план эксперимента типа 2^3. (таблица 3.5).

Кроме факторов x_1, x_2, x_3 на технологический процесс могут влиять другие факторы, известные или неизвестные исследователю, которые он не может контролировать или может контролировать, но не может поддерживать стабильными на неизменном уровне. Эти факторы самопроизвольно могут изменяться во времени, и если опыты выполнять в последовательности, соответствующей их нумерации в таблице, то при большой длительности эксперимента, дрейфующие во времени неучтенные факторы могут значительно изменяться по величине и существенно исказить результаты, эксперимента. Предположим, что рассматриваемый технологический процесс представляет собой пропитку обмоток сухого трансформатора кремнеорганическим лаком, в котором используется некоторый катализатор в одном и том же количестве в каждом опыте. Считаем, что активность катализатора неизменна. В действительности, с течением времени при хранении катализатора активность его может уменьшаться вследствие старения под влиянием параметров окружающей среды. Так как эксперимент имеет определённую длительность во времени, то при выполнении первой половины опытов будет использоваться более активный катализатор (уровень «+»), чем при выполнении последующих опытов (уровень «–»).

Кроме запланированного изменения факторов x_1, x_2, x_3 происходит незапланированное изменение фактора x_4 - активности катализатора. Так как факторы x_3 , x_4 в эксперименте изменяются одинаково (табл. 3.5), то нельзя оценивать «чистое» влияние фактора x_3. Коэффициент b_3 получается результатом совместной оценки $\beta_3+\beta_4$. Неучтенных факторов, уровни которых дрейфуют во времени вверх или вниз, может быть много, поэтому

$b_3 \rightarrow \beta_3+\sum_{i>3} \beta_i$.

Таблица 3.5

Номера опытов	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	+	+	+	+	
2	-	+	+	+	
3	+	-	+	+	
4	-	-	+	+	

5	+	+	-	-	
6	-	+	-	-	
7	+	-	-	-	
8	-	-	-	-	

Для того чтобы исключить влияние неконтролируемого временного дрейфа неучтенных факторов на результаты эксперимента, необходимо план сделать ортогональным относительно этого дрейфа, т.е. необходимо, чтобы первые, последние и центральные в таблице опыты с равной вероятностью оказались выполненными в первую и в последнюю очередь во времени. Для выполнения этого условия необходимо случайным образом назначить очередность выполнения опытов, обеспечивая при этом равную вероятность для всех номеров опытов. Для этого можно воспользоваться таблицей случайных чисел, для чего из любого столбца таблицы выписывают подряд числа в количестве, равном числу опытов. Эти числа и определяют номера опытов, а последовательность выполнения опытов должна соответствовать порядковому номеру числа в ряде. Числа в таблице случайных чисел обычно многозначные, поэтому справа или слева от каждого числа необходимо отделить столько знаков, сколько предполагается выполнить опытов. В нашем примере число опытов N однозначное, поэтому будем отделять один знак слева. Выписывать числа надо, пропуская те, которые дают числа больше N или которые повторяют уже выпавшие номера опытов. С учетом этого нами выбраны следующие восемь чисел: 873, 2551, 5695, 3463, 4326, 6467, 8266, 1856. Очередность выполнения опытов в нашем примере должна быть следующая: опыты №7, 2, 5, 3, 4, 6, 8, 1 [13].

При работе на компьютере в большинстве прикладных программ и оболочек генератор случайных чисел задается оператором RND – *рандомизация*. В Excel – генератор случайных чисел имеет вид: **СЛЧИС()**.

Процедура случайного перемешивания опытов в отношении последовательности их выполнения называется ***рандомизацией*** *опытов.*

Рандомизация обязательно должна выполняться при исследовании различных технологических процессов, а также испытании устройств, на работу которых могут оказывать влияние дрейфующие неконтролируемые факторы. При проведении эксперимента на ЭВМ или при испытании технических устройств, в которых не проявляются процессы старения или износа деталей материала за время эксперимента (проявляющиеся, например, в увеличение вибрации или уровня шума), и при отсутствии влияния внешней среды, рандомизацию опытов делать не обязательно.

4 Дробный факторный эксперимент

Количество опытов в полном факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели. Другими словами, полный факторный эксперимент обладает большой избыточностью опытов. Целесообразно сократить их число за счет той информации, которая не очень существенна при построении линейных моделей. При этом нужно стремиться к тому, чтобы матрица планирования не лишилась своих оптимальных свойств.

Рассмотрим простейшую матрицу ПФЭ $N=2^2$. В таблице 4.1 кроме столбцов, соответствующих факторам x_1 и x_2, добавим столбец, соответствующий парному взаимодействию x_1x_2.

Таблица 4.1 Полный факторный эксперимент с учетом эффекта взаимодействия.

№ опыта	x_0	x_1	x_2	(x_3) x_1x_2	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	-	-	+	y_4

Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения

$$y = b_0 + b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Если имеются основания считать, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента: b_0, b_1 и b_2. Остается одна степень свободы. Употребим ее для минимизации числа опытов. При линейном приближении $b_{12} \to 0$ и вектор-столбец x_1x_2 можно использовать для нового фактора x_3. Поставим этот фактор в скобках над взаимодействием x_1x_2 и посмотрим, каковы будут оценки коэффициентов. Здесь уже не будет тех раздельных оценок, которые мы имели

в полном факторном эксперименте 2^k. Оценки смешаются следующим образом:

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}.$$

Так как мы приняли постулат о линейности модели, то все парные взаимодействия незначимы. Следовательно, можно минимизировать число опытов: вместо восьми опытов для изучения трех факторов можно поставить четыре. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т. п.), в чем можно самостоятельно убедиться.

Найденное правило можно сформулировать так: ***чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь.***

Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Мы рассмотрели самый простой случай: матрицу из четырех опытов для трехфакторного планирования. С увеличением числа факторов вопрос о минимизации числа опытов превращается в более сложную задачу. Рассмотрим ее детально и введем новые определения и понятия.

4.1 Дробные реплики ПФЭ.

Поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов, мы воспользовались половиной полного факторного эксперимента 2^3, или «полурепликой». Если бы мы x_3 приравняли к $-x_1x_2$, то получили бы вторую половину матрицы 2^3. В этом случае:

$$b_1 \to \beta_1 - \beta_{23}; b_2 \to \beta_2 - \beta_{13}; \quad b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}.$$

При реализации обеих полуреплик можно получить раздельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия, как и в полном факторном эксперименте 2^3.

Объединение этих двух полуреплик и есть полный факторный эксперимент 2^3.

Матрица из восьми опытов для четырехфакторного планирования будет полурепликой от полного факторного эксперимента 2^4, а

для пятифакторного планирования - четверть-репликой от 2^5. В последнем случае два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия. Для обозначения дробных реплик, в которых *p* линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условным обозначением 2^{k-p} . Так, полуреплика от 2^6 запишется в виде 2^{6-1}, а четверть-реплика от 2^5 - в виде 2^{5-2}.

Таблица 4.2 Условные обозначения дробных реплик и число опытов.

Число факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Число опытов	
			ПФЭ	ДФЭ
3	1/2-реплика от 2^3	2^{3-1}	8	4
4	1/2-реплика от 2^4	2^{4-1}	16	8
5	1/4-реплика от 2^5	2^{5-2}	32	8
6	1/8-реплика от 2^6	2^{6-3}	64	8
7	1/16-реплика от 2^7	2^{7-4}	128	8
5	1/2-реплика от 2^5	2^{5-1}	32	16
6	1/4-реплика от 2^6	2^{6-2}	64	16
7	1/8-реплика от 2^7	2^{7-3}	128	16
8	1/16-реплика от 2^8	2^{8-4}	256	16
9	1/32-реплика от 2^9	2^{9-5}	512	16
10	1/64-реплика от 2^{10}	2^{10-6}	1024	16
11	1/128-реплика от 2^{11}	2^{11-7}	2048	16

Дробный план типа $2^{к-p}$ содержит в 2^p раз меньше опытов, чем план ПФЭ. План дробного факторного эксперимента (ДФЭ) строится следующим образом. Для количества факторов (*к–р*) составляют план ПФЭ по правилам, описанным ранее. Элементы столбцов для остальных *p* факторов получают перемножением соответствующих элемен-

тов столбцов предыдущих факторов, причем для каждого из p факторов комбинация факторов – сомножителей должна быть своей.

4.2 Генерирующие соотношения

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть число факторов k=6. План ПФЭ при таком значении «k» содержал бы $N=2^6=64$ опыта. Построим план ДФЭ типа $2^{k-3}=2^{6-3}$, то есть 1/8 – реплику от ПФЭ. Для трех факторов (6-3=3) составим план ПФЭ из 8 опытов, а столбцы остальных факторов получим с помощью следующих соотношений, который называются ***генерирующими соотношениями***:

$$x_4 = x_1 \times x_2 \times x_3; \qquad x_5 = x_1 \times x_2; \qquad x_6 = x_2 \times x_3. \qquad (4.1)$$

Эти соотношения показывают, элементы каких столбцов надо перемножить, чтобы получить элементы факторов x_4, x_5, x_6.

Получим следующий план, в котором столбец $x_2 \times x_3$ включен только для последующих пояснений. Заметим, что соотношения (4.1) можно было бы взять и со знаком минус. Полученный план содержит лишь 8 опытов вместо 64 в плане ПФЭ. Однако этот план обладает худшей разрешающей способностью в отношении разделения влияния отдельных факторов и их парных и тройных взаимодействий на y. Это объясняется тем, что например, фактор x_6 в эксперименте изменяется от опыта к опыту точно так же, как и фактор $x_2 \times x_3$ (таблица 4.3). Поэтому нельзя утверждать, что изменение y в эксперименте объясняется изменением x_6 или изменением $x_2 \times x_3$. При вычислении коэффициентов регрессии b_6 *и* b_{23} получатся одинаковые значения и нельзя сказать, что именно вычислено: b_6 или b_{23} . Это означает, что найденные коэффициенты регрессии будут оценками совместных эффектов

$$b_4 \rightarrow \beta_4+\beta_{123}, \qquad b_5 \rightarrow \beta_5+\beta_{12}, \qquad b_6 \rightarrow \beta_6+\beta_{23} \qquad (4.2)$$

Здесь символом β обозначены теоретические значения коэффициентов регрессии.

Таблица 4.3 Дробный план для шести переменных типа $2^{k-3}=2^{6-3}$

Номера опытов	x_1	x_2	x_3	$x_4=x_1\times x_2\times x_3$	$x_5=x_1\times x_2$	$x_6=x_2\times x_3$	x_2x_3	y
1	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	-	+	+	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	-	-	y_3
4	-	-	+	+	+	-	-	y_4
5	+	+	-	-	+	-	-	y_5
6	-	+	-	+	-	-	-	y_6
7	+	-	-	+	-	+	+	y_7
8	-	-	-	-	+	+	+	y_8

Таким образом, дробный план не позволяет оценить коэффициенты b_i при линейных членах многочлена в «чистом виде» и определить «чистое» влияние факторов x_i. Поэтому дробные планы следует применять в тех случаях, когда есть уверенность, что парные, тройные и т.п. эффекты равны нулю. В этом случае в выражениях (4.2) коэффициенты $\beta_{123}, \beta_{12}, \beta_{23}$ были бы равны нулю, и коэффициенты b_4, b_5, b_6 были бы оценками соответственно $\beta_4, \beta_5, \beta_6$.

Для расчета коэффициентов линейной математической модели пользуются теми же формулами, что и для расчета коэффициентов регрессии ПФЭ. Например, для расчета коэффициента b_4 матрицы, представленной в таблице 4.3 выражение будет иметь вид

$$b_4 = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 + y_7 - y_8}{8}$$

Знаки перед y_j определяются знаками вектор-столбца x_4.

Параметры x_i, в технических и прикладных научных исследованиях, как правило, изменяются обычно в небольших пределах, и математические модели функционирования этих объектов достаточно точно могут быть описаны многочленами второй степени [5]. Это значит, что в коэффициенты типа b_{iii} и b_{ijq} почти всегда можно считать равными нулю. Это справедливо и в отношении коэффициентов при четверных и более взаимодействиях факторов. Данное утверждение иллюстрируется на рисунке рис. 4.1, где кривая 1 определяет не-

известную нам зависимость характеристики некоторого объекта от его параметра *x*. Эта зависимость при широком интервале изменения *x* довольно сложная и не может быть точно описана квадратным уравнением. Для более точного описания требуются уравнения более высокой степени. Однако, в реальных объектах, входные параметры обычно могут изменяться или их целесообразно изменять в значительно более узких пределах согласно различным техническим условиям или разумному смыслу. Если в данном случае *x* может изменяться в пределах от $x_{(-)}$ до $x_{(+)}$, то отрезок $y(x)$, соответствующий

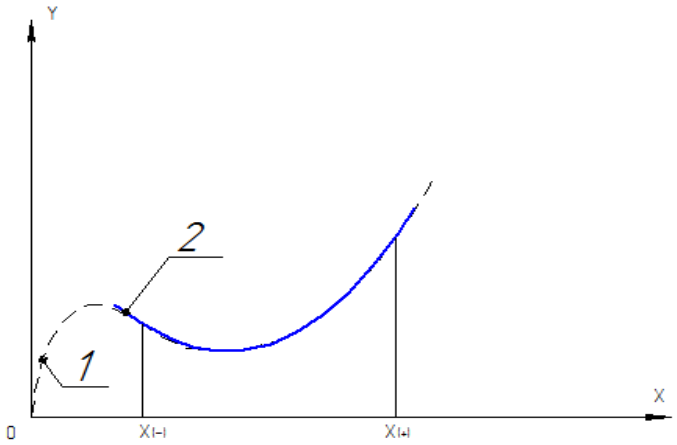


Рисунок 4.1 - Аппроксимация части зависимости параболой

этому интервалу, можно достаточно точно описать уравнением второй степени (кривая 2 рисунок 3.4). Конечно, за пределами интервала истинная и полученная зависимости далеко разойдутся, но за пределами интервала эти зависимости нас не интересуют.

Следует отметить, что исследователя, как правило, интересует математическая модель объекта лишь в достаточно малом объеме факторного пространства. Например, при проектировании электрической машины постоянного или переменного тока, рассматривая влияние величины индукции в воздушном зазоре машины, на рабочие или пусковые характеристики машины, не имеет смысла изменять индукцию от нуля до бесконечности. В машинах малой и средней мощности индукцию в зазоре следует принимать в диапазоне 0,6…0,95 Тесла. Для машины конкретной мощности разумный, с инженерной точки зрения, диапазон магнитных индукций в зазоре будет другим. Аналогичные соображения можно высказать в отношении любого

другого параметра электромеханического преобразователя энергии или технологического процесса.

Если план ДФЭ дает возможность оценить линейные эффекты совместно с тройным или более высокого порядка эффектами, то такой план обладает достаточно высокой разрешающей способностью, так как тройные и эффекты более высокого порядка можно считать равным нулю. Парные эффекты в основном не равны нулю, так как математическая модель практически любого объекта исследования нелинейная и, поэтому, требует описания уравнением второй степени. Следовательно, генерирующие соотношения типа $x_i = x_j\, x_q$ применять нежелательно. Поэтому, при k=3, как правило, планируют полный, а не дробный план. При k=4 можно построить лишь полуреплику от ПФЭ типа 2^{4-1} с генерирующим соотношением $x_4 = \pm\, x_1\, x_2\, x_3$. Но чем больше k, тем больше имеется возможностей для построения дробных планов с разной степенью дробности. Например, при k=14 можно построить полуреплику от ПФЭ типа 2^{14-1} и четвертьреплику типа 2^{14-2} в различных вариантах, планы типа 2^{14-3}, 2^{14-4}, 2^{14-5}, 2^{14-6}, 2^{14-7} и другие. В последнем случае план содержит $N=2^{14-7}=128$ опытов против $N=2^{14}=16376$ опытов в полном факторном эксперименте.

При решении задач идентификации следует составлять такие планы, чтобы они позволяли получить оценки не только линейных, но и парных эффектов. Это необходимо для правильного описания поверхности цели уравнением второй степени.

В заключении следует сказать, что ДФЭ – эффективный инструмент для сокращения числа опытов, но применять его следует в обоснованных случаях и с соблюдением некоторой осторожности.

5 Крутое восхождение по поверхности отклика

5.1 Вычисление коэффициентов регрессии и шагов крутого восхождения.

По результатам ПФЭ или ДФЭ мы получили N значений параметра оптимизации y_j.

В разделе 3.5 мы показали, что для линейной математической модели

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k \qquad (6.1)$$

Коэффициенты b_j рассчитываются по формуле (3.7):

$$b_j \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i}{N}, \qquad j = 0,1,2, \ldots, k.$$

Учитывая, что в кодированных значениях $x_{ji} = \pm 1$, в формуле числитель будет равен алгебраической сумме y_i, где знак перед каждым слагаемым определяется знаком перед элементом вектор-столбца соответствующего фактора.

В качестве примера запишем формулу для расчета коэффициента b_3 матрицы 2^3 таблицы 3.3

$$b_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8}{8}.$$

Геометрическая интерпретация уравнения (6.1) заключается в том, что математическая модель для двухфакторного эксперимента представляет собой уравнение плоскости, касательной к поверхности отклика в точке нулевого уровня, а коэффициенты b_j – коэффициенты наклона этой плоскости к соответствующим координатным осям.

Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верх-

ний или нижний.

По математическому смыслу коэффициенты b_j – есть приближенные значения составляющих вектора градиента функции отклика

$$\overrightarrow{grad}\, y = \vec{i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1} + \vec{j} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} + \cdots + \vec{k} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k}. \qquad (6.2)$$

По этим значениям можно определить направление линии крутого восхождения (спуска) для для данной точки нулевого уровня.

Уравнение (6.1), если его записать для значений факторов в абсолютных единицах будет иметь вид

$$y^{\sim} = b_0 + b_1 \frac{x_1^{\sim} - x_{10}}{\Delta x_1} + b_2 \frac{x_2^{\sim} - x_{20}}{\Delta x_2} + \cdots + b_k \frac{x_k^{\sim} - x_{k0}}{\Delta x_k}. \quad (6.3)$$

Здесь $x_1^{\sim}, x_2^{\sim}, \ldots, x_k^{\sim}$ – значения факторов в абсолютных единицах;

$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0}$ – значения факторов в абсолютных единицах в точке нулевого уровня;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k$ – интервалы варьирования факторов.

Для того, чтобы начать крутое восхождение по поверхности отклика, моделируемой уравнением (6.3), необходимо рассчитать ***шаги крутого восхождения*** J_i для каждого фактора.

Шагами крутого восхождения называют величины приращений значений факторов при движении по поверхности отклика к области оптимума.

Очевидно, что шаги должны быть пропорциональны коэффициентам b_j линейной математической модели, рассчитанным по результатам ПФЭ или ДФЭ

$$J_j = m \cdot b_j. \qquad (6.4)$$

Выбор коэффициента пропорциональности m , который называют ***масштабом шагов крутого восхождения***, задача достаточно слож-

ная. Масштаб выбирается исходя из наиболее значимого коэффициента b_j. От того, как будет выбран масштабный коэффициент m , будет зависеть количество необходимых шагов крутого восхождения. С одной стороны, особенно при проведении физического эксперимента, необходимо стремиться к минимизации опытов, но с другой стороны, появляется опасность «перешагнуть» область оптимума. В расчетных экспериментах, где количество шагов не так критично, масштаб m выбирается минимальным.

Результаты выбора шагов обычно записывают в виде таблицы.

Таблица 6.1 – Выбор шагов крутого восхождения.

b_0	b_1	b_2	…	b_k	$J_1=m\cdot b_1$	$J_2=m\cdot b_2$	…	$J_k=m\cdot b_k$

Отметим, что *масштаб шагов крутого восхождения m один для всех факторов*.

Так же, как и коэффициенты b_j, шаги крутого восхождения J_j могут быть как положительными, так и отрицательными. Положительное значение J_j означает, что соответствующий фактор x_j должен увеличивать свое значение при поиске максимума параметра оптимизации, а отрицательное, что значение фактора должно уменьшаться.

5.2 Алгоритм крутого восхождения.

Крутое восхождение по поверхности отклика должно начинаться из точки нулевого уровня, а не из точки с лучшим значением параметра оптимизации в ПФЭ, как может показаться на первый взгляд. Это наглядно иллюстрирует рисунок 6.1. Лучшее значение, полученное в ПФЭ – y_1. Однако движение по градиенту из этой точки не ведет к вершине поверхности отклика, а начало движения из центра плана, дает лучший результат.

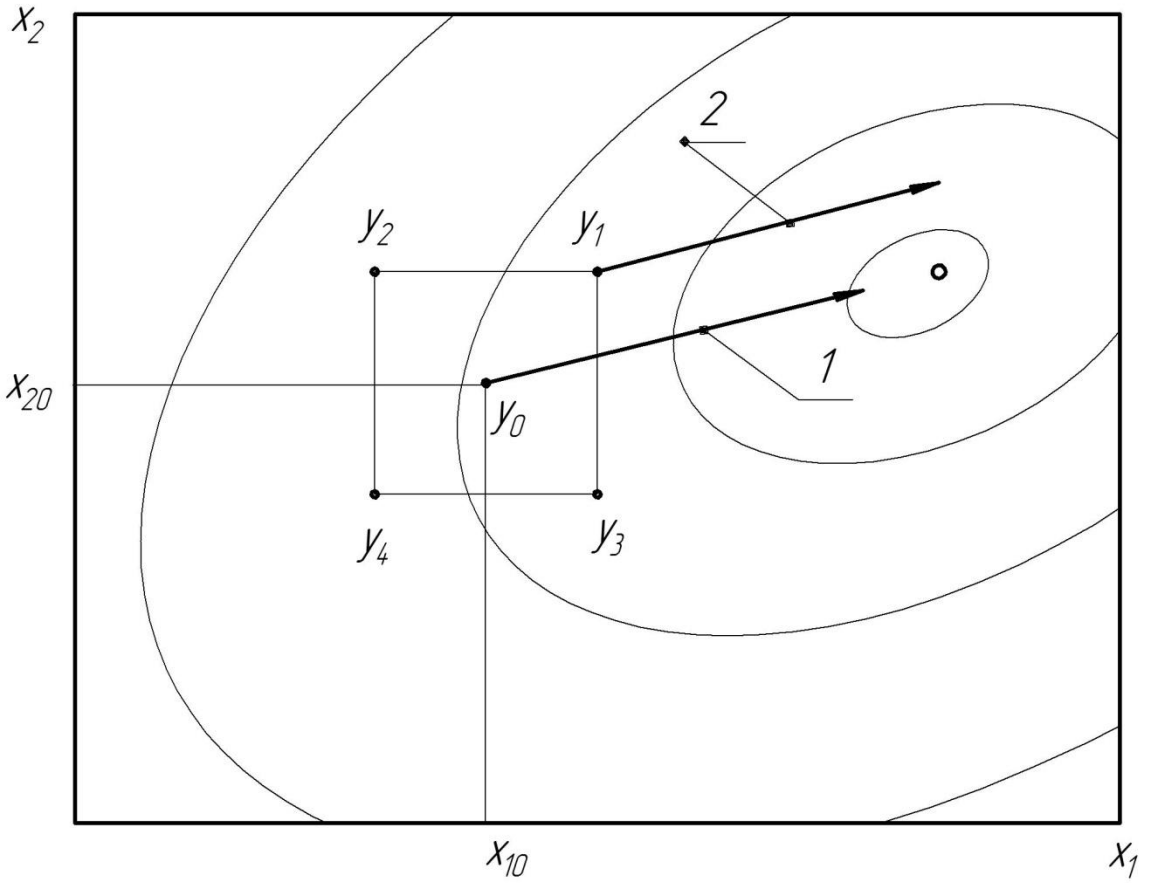


Рисунок 6.1 – Начало крутого восхождения из центра плана (точки нулевого уровня) -1, и из лучшей точки плана -2.

Алгоритм крутого восхождения удобно оформлять в виде таблицы.

Таблица 6.2 – Крутое восхождение по поверхности отклика.

№ шага	x_1	x_2	…	x_k	$\tilde{y}$	y
0	x_{10}	x_{20}	…	x_{k0}	$\tilde{y_0}$	y_0
1	$x_{10}+J_1$	$x_{20}+J_2$	…	$x_{k0}+J_k$	$\tilde{y_1}$	y_1
2	$x_{10}+2J_1$	$x_{20}+2J_2$	…	$x_{k0}+2J_k$	$\tilde{y_2}$	y_2
3	$x_{10}+3J_1$	$x_{20}+3J_2$	…	$x_{k0}+3J_k$	$\tilde{y_3}$	y_3
…	…	…	…	…	…	…
n	$x_{10}+nJ_1$	$x_{20}+nJ_2$	…	$x_{k0}+nJ_k$	$\tilde{y_n}$	y_n

Суть алгоритма восхождения сводится к тому, что на каждом последующем шаге к значению фактора прибавляется шаг крутого вос-

хождения J_J до тех пор, пока параметр оптимизации y растет, если цель оптимизации – поиск максимума y.

Восхождение приостанавливается, если на последующем шаге получится худшее значение параметра оптимизации, чем на предыдущем.

Одновременно со значением параметра оптимизации y целесообразно рассчитывать и его значение $\tilde{y}$ по формуле линейной математической модели (6.3). Расхождение соответствующих значений y покажет, на сколько линейная модель адекватна.

На рисунке 6.2 показан результат крутого спуска по поверхности отклика и по ее линейной математической модели, полученный в ходе решения учебной задачи по оптимизации массы силового трансформатора. Целью оптимизации было найти минимальное значение массы активных частей трансформатора.

Из графика видно, что лучший результат соответствует 26 шагу крутого спуска. Затем результат начинает ухудшаться.

Линейная модель отражает процесс с достаточной точностью только на первых четырех шагах. Из этого следует, что уточнение положения области оптимума возможно. Для этого необходимо провести новую серию опытов ПФЭ в лучшей точке, либо исследовать поверхность нелинейными планами второго порядка.

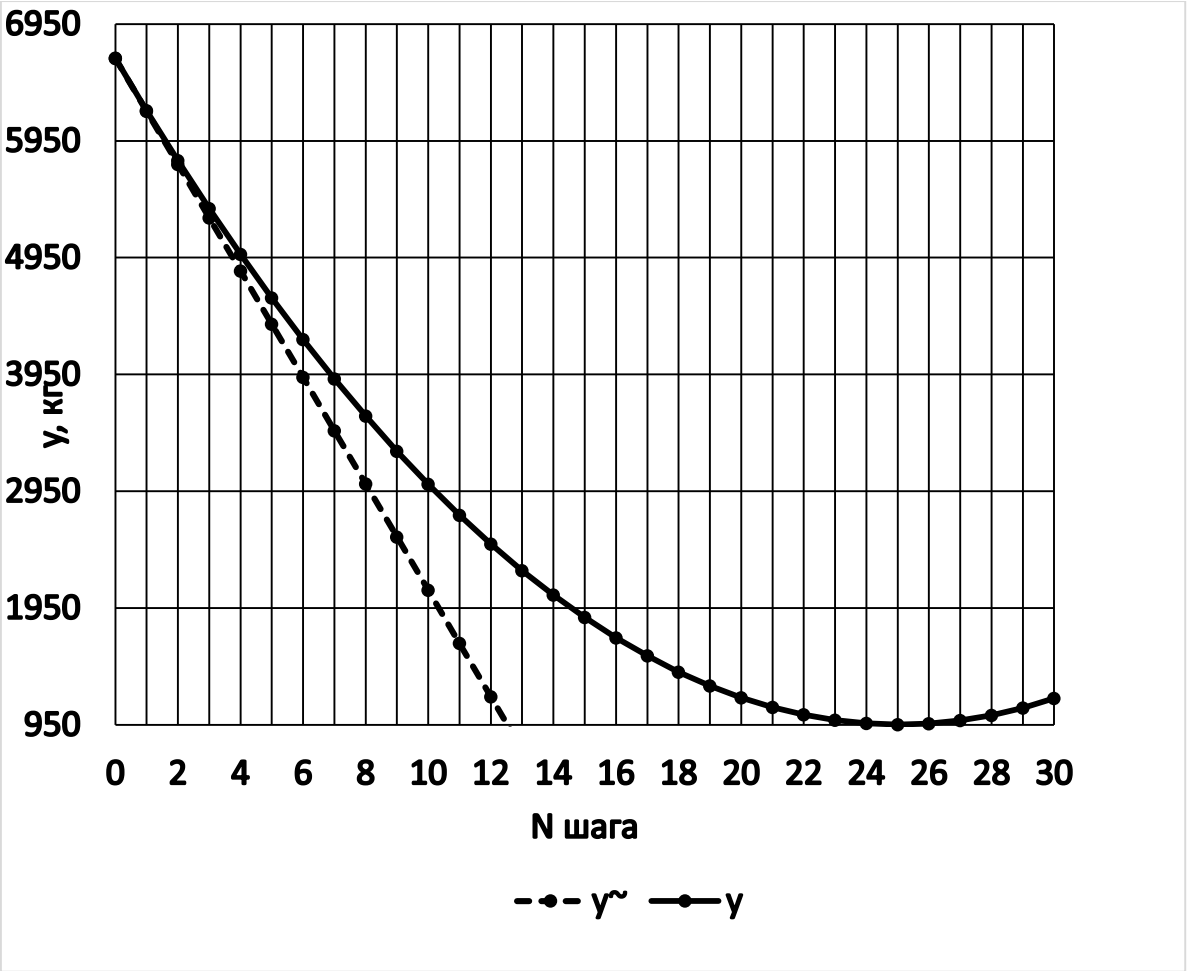


Рисунок 6.2 – Ход крутого спуска по поверхности отклика *y* и ее линейной модели $\tilde{y}$.

5.3 Принятие решения после крутого восхождения

После крутого восхождения возможны разнообразные ситуации:

- крутое восхождение эффективно;
- крутое восхождение не эффективно;
- положение оптимума:
  - близко;
  - далеко;
  - не определено;
- адекватна или нет линейная модель?
- и т. д.

Рассмотрим некоторые из этих ситуаций.

1. *Крутое восхождение эффективно*.

Эффективным будем называть восхождение при котором движение по градиенту приводит к улучшению значения параметра оптимизации по сравнению с самым хорошим результатом в матрице ПФЭ или ДФЭ.

При эффективном крутом восхождении возможны два исхода: область оптимума достигнута или область оптимума не достигнута.

1.1 Область оптимума достигнута.

Этот случай является самым легким в смысле принятия решений. Экспериментатор может окончить исследование, если задача заключалась в достижении области оптимума, или продолжить исследование, если задача заключалась не только в достижении области оптимума, но и в детальном ее изучении. При этом необходимо достроить линейный план до плана второго порядка и результаты эксперимента представить в виде полинома второй степени. Перечисленные два варианта принятия решений следуют из концепции Бокса-Уилсона, согласно которой задача оптимизации условно разбивается на два этапа. Первый этап - крутое восхождение с целью скорейшего достижения области оптимума. При этом используется линейное планирование. Линейный план может использоваться один или несколько раз в зависимости от интенсивности продвижения. Второй этап - описание области оптимума методами нелинейного планирования. При эффективном крутом восхождении весьма часто удается быстро, приблизиться к области оптимума (совершить крутое восхождение один раз). Исследователь попадает в область оптимума, которая не может быть описана линейным приближением, и движение по методу крутого восхождения заканчивается. Завершается первый этап оптимизации. Метод крутого восхождения не решает вопроса о самой лучшей точке поверхности отклика, об экстремуме. Решение этой задачи излагается в методах нелинейного планирования [15] и выходит за рамки настоящего пособия.

1.2 Область оптимума не достигнута.

В этом случае ставится линейный план следующего цикла и исследование продолжается.

Возможные варианты решений:

1) окончить исследование;

2) построить план второго порядка для исследования области оптимума;

3) построить линейный план следующего цикла крутого восхождения.

При построении линейного плана второго цикла прежде всего возникает вопрос о выборе центра эксперимента. Самая простая рекомендация - расположить центр нового плана в той части факторного пространства, которая соответствует условиям наилучшего опыта при крутом восхождении.

1.3 Неопределенная ситуация.

Часто проблема заключается в том, что область оптимума определить невозможно. Не то, что её положение не известно, а то, что значение $y_{опт}$ неизвестно – нет близких аналогов, отсутствует теоретическая модель и т. д.

Когда y не имеет ограничения и экспериментатор не может определить степень близости оптимума, возможны два решения: построение линейного плана следующего цикла или, если достигнут требуемый результат, окончание работы.

2. Крутое восхождение не эффективно.

Принимать решения при неэффективном движении по градиенту гораздо сложнее. Принятие решений во многом зависит от определенности ситуации (далеко от оптимума, близко, неопределенно) и от адекватности линейной модели.

2.1 Область оптимума близка.

Если при реализации матрицы планирования удалось получить достаточно высокие значения параметра оптимизации и при крутом восхождении улучшить их не удалось, то наиболее типичными являются решения:

1) окончание .исследования (выбирается лучший опыт);

2) построение плана второго порядка для описания области оптимума.

Если линейная модель была неадекватна, то возможно третье решение - возврат к началу исследования для выяснения причины неадекватности линейной модели.

5.4 Оценка адекватности модели.

Под адекватностью модели понимают степень достоверности описания свойств объекта исследования [5], которая описывается зависимостями (3.3) или (3.5). Если бы адекватность математической модели была абсолютной и если бы значения y в опыте определялись без ошибок, то значения y в каждом опыте оказались бы равными соответствующим значениям $\hat{y}$, вычисленным по полученной зависимости. В действительности такого не может быть, и значения y_u в каждом опыте отличаются от теоретических значений $\hat{y}_u$, вычисленных по модели.

Оценка адекватности модели основана на сравнении величины дисперсии адекватности S_{ag}^2 с дисперсией ошибки опыта $S^2(y)$. Дисперсия адекватности определяется по формуле

$$S_{ag}^2 = \frac{1}{N-(k'+1)} \sum_{u=1}^{N} (y_u - \hat{y}_u)^2 \qquad (6.5)$$

где y_u – значения y в u опыте по экспериментальным данным;

$\hat{y}_u$ – значения y в u опыте, определённые по уравнению (3.3) или (3.5).

Для того, чтобы воспользоваться формулой (6.5), сначала надо вычислить по уравнению регрессии значения $\hat{y}_u$ для условий каждого опыта. Это трудоемко, поэтому обычно пользуются другой формулой, дающей тот же результат:

$$S_{ag}^2 = \frac{1}{N-(k'+1)} \left[(yy) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{k} b_i (ij) - \sum_{i<j}^{k} b_{ij} (ijy) \right] \frac{1}{N-(k'+1)} \left[\sum_{u=1}^{N} y_u^2 - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{k} b_i \sum_{u=1}^{N} x_{iu}\, y_u - \sum_{i<j}^{k} b_{ij} \sum_{u=1}^{N} x_{iu}\, x_{ju}\, y_u \right] \qquad (6.6)$$

Используемые в этом выражении суммы $\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\, y_u$ и $\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\, x_{ju}\, y_u$ уже вычислены при определении коэффициентов регрессии.

Если окажется, что дисперсия адекватности меньше дисперсии ошибки опыта, то уравнение адекватно. Действительно, если ошибка в определении $\hat{y}$ по уравнению не превышает ошибки при определении у опытным путем, то уравнение следует признать адекватным.

Если дисперсия адекватности больше дисперсии ошибки опыта, то следует проверить существенно ли больше. Для этого вычисляют критерий Фишера по формуле

$$F = \frac{S_{ag}^2}{S^2(y)} \qquad (6.7)$$

Вычисленное значение F сравнивают с табличным значением, определенным при числе степеней свободы $f_{ag} = N - (k' + 1)$ для S_{ag}^2 и числе степеней свободы $f_y = m - 1$ для $S^2(y)$ где m – число параллельных опытов при оценке дисперсии ошибки опыта, и при 5 %-ом уровне значимости. Если дисперсия ошибки опыта была известна априори на основании многочисленных статистических данных, то $f_y = \infty$. Таблицы F – критерия Фишера имеются в книгах по математической статистике и теории эксперимента.

Если вычисленное значение F меньше табличного, то это значит, что S_{ag}^2 несущественно превышает $S^2(y)$ и уравнение регрессии признается адекватным. В ином случае уравнение не адекватно.

Если задача исследования состояла в определении математической модели объекта исследовании, а уравнение регрессии оказалось адекватным, то цель достигнута. Если уравнение не адекватно, то необходимо продолжить эксперимент, выполнить еще ряд опытов, позволяющих вместе с ранее выполненными опытами определить коэффициенты полного квадратного уравнения.

6. Пример решения задачи оптимизации моментного двигателя.

6.1.Постановка задачи

Рассмотрим пример решения практической задачи оптимизации проектируемого моментного электродвигателя с ограниченным углом поворота ротора и возбуждением от постоянных магнитов, предназначенного для использования в авиационной технике.

Основной задачей проектирования любого электромеханического преобразователя, в том числе и моментного двигателя (МД), является создание конкурентоспособного варианта машины, который имел бы наилучшие технические и экономические показатели.

Основные задачи при создании электроприводов и, в частности их электромеханической части – моментных двигателей, для авиационного электрооборудования сформулированы в [6] следующей последовательности:

- повышение надежности (вероятности безотказной работы в заданное время) системы;
- снижение относительной массы, уменьшение габаритов и повышение энергетических показателей электрических машин;
- повышение конкурентоспособности изделий, в том числе за счет снижения их себестоимости.

Эти задачи могут быть решены при применении системного подхода к процессу автоматизированного проектирования, заключающегося в создании адекватной математической модели машины, учитывающей массогабаритные, энергетические, стоимостные показатели, характеристики ее надежности. Несомненно, что для получения математической модели требуется решить задачу расчета магнитного поля машины. Моментный двигатель (МД) с органическим углом поворота ротора, конструкция которого приведена на рис.6.1, из-за своих особенностей (беспазовой конструкции обмотки статора, вынесенной в воздушный зазор) не может рассчитываться по традиционным инженерным методикам.

Несмотря на относительную простоту конструкции МД, его геометрия и основные параметры, как показал опыт проектирования, не могут быть рассчитаны последовательным линейным алгоритмом. В расчете, как правило, требуется несколько итеративных циклов, которые не при всяких сочетаниях параметров являются сходящимися. Кроме того, последовательность расчета во многом определяется выбором критерия оптимальности и набора варьируемых переменных.

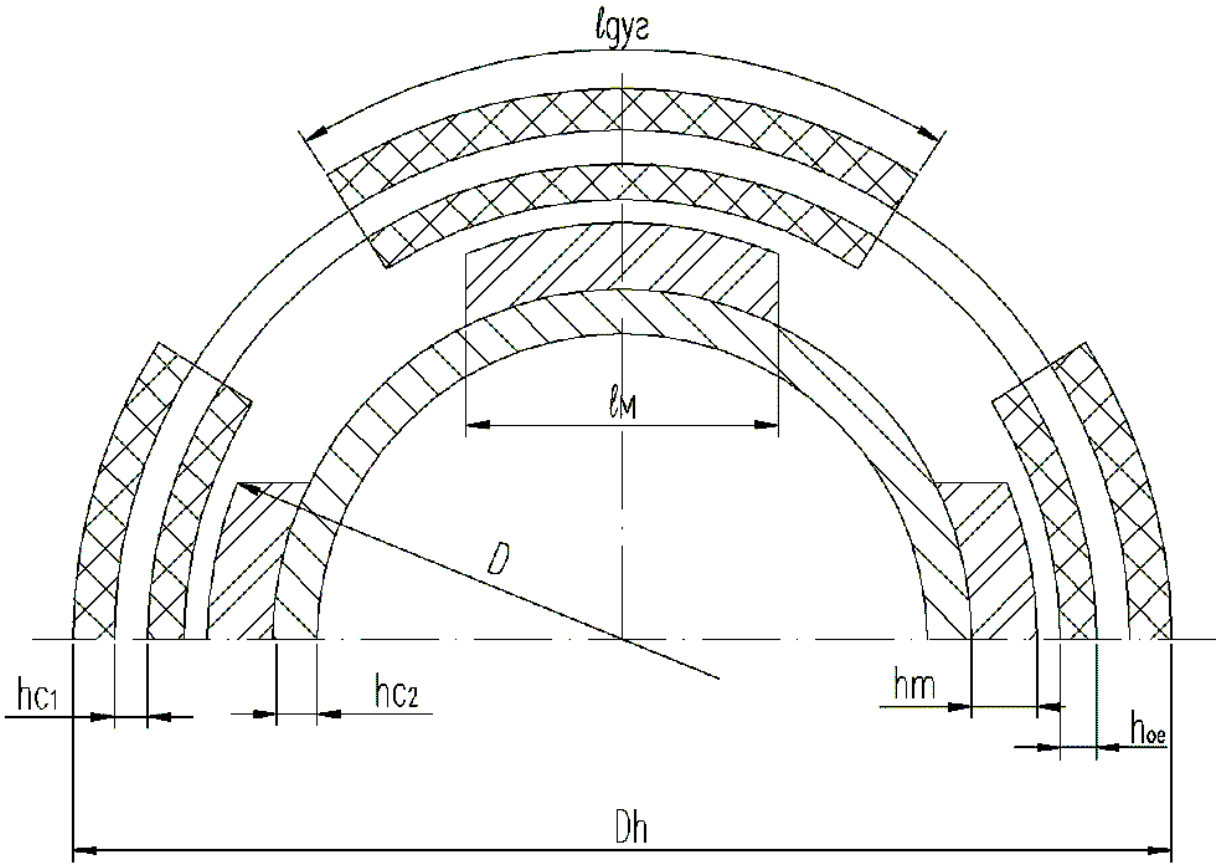


Рисунок 6.1 – Моментный двигатель с ограниченным углом поворота ротора.

6.2. Критерий оптимальности.

Критерием качества электрической машины является совокупность технических, экономических и эксплуатационных параметров. Эта совокупность должна, как правило, учитывать сразу несколько разнородных параметров, которые могут находиться между собой в логическом противоречии [2, 28, 29]. Можно построить для каждого

параметра математические модели и определить области оптимума для них, но одновременно оптимизировать сразу все параметры невозможно [1]. Есть несколько компромиссных решений этой проблемы. Первое – выбирается главный параметр, который оптимизируется, а второстепенные выступают в виде функций-ограничителей. Функции-ограничители могут задаваться либо в виде жестких условий уравнениями или неравенствами, либо в виде штрафных функций, которые искусственно ухудшают главный параметр, если второстепенный вышел за границы оптимальных значений [2]. В применении к МД, предназначенному для работы в бортовой автоматике, за главный параметр, очевидно, следует принять массу машины. В роли функций – ограничителей могут выступать потребляемая мощность, габариты двигателя и его себестоимость. Если определяющим критерием является себестоимость двигателя, которую на раннем этапе проектирования трудно определить, можно в качестве главного параметра принять массу постоянных магнитов. Известно, что редкоземельные магниты, примерно, в 80…150 раз дороже обмоточной меди и в 300…1000 раз дороже электротехнической стали. Таким образом, себестоимость двигателя с постоянными магнитами во многом определяется их массой. Параметры ограничители в этом варианте будут – потребляемая мощность и габариты двигателя.

Вторым методом многокритериальной оптимизации является построение обобщенного параметра Y в виде суммы (6.1) или произведения (6.2) частных параметров оптимизации [2].

$$Y = \alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* + ... + \alpha_n y_n^*, \text{ о.е.} \qquad (6.1)$$

где y_1^*, y_2^*, y_n^* - относительные значения частных откликов;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ – коэффициенты значимости (весовые коэффициенты) соответствующих частных параметров. Обычно эти коэффициенты выбираются из интервала 0…1, таким образом, чтобы их сумма была равна 1.

$$Y = (y_1^*)^{\alpha_1} \cdot (y_2^*)^{\alpha_2} \cdot ... \cdot (y_n^*)^{\alpha_n}, \text{ о.е.} \qquad (6.2)$$

Следует помнить, что в выражение 6.2 наиболее значимому параметру соответствует наименьшее значение весового коэффициента

α_i, так как относительные значения частных откликов лежат в интервале от 0 до 1.

Для того, чтобы в выражениях (6.1) и (6.2) складывать и перемножать различные параметры их нужно привести к однородной безразмерной шкале. Методы, основанные на экспертных бальных оценках дают слишком грубые результаты и не могут быть рекомендованы для этой цели. Замена физического параметра его относительным значением в виде линейной функции может дать существенное искажение адекватности модели, если «идеальное» значение выбрано необоснованно. Сгладить ошибки субъективного выбора позволяет предложенная Харрингтоном [28, 29] методика. Она заключается в следующем. Каждый частный параметр трансформируется в относительное значение по выражению:

$$y_1^* = \exp[-\exp(-\frac{y_{0i} - y_i}{\Delta y_i})], \text{ о.е.,} \qquad (6.3)$$

где y_{0i} – минимально удовлетворительное значение частного параметра;

y_i – текущее значение частного параметра;

Δy_i – масштаб по абсолютной шкале параметра.

Выражение во внутренних скобках следует брать с обратным знаком если ищется минимум параметра.

Достоинствами преобразования 6.3 являются:

- монотонность функции на интервале [0;1] при изменении аргумента от -∞ до +∞;
- высокая чувствительность функции в рабочем диапазоне;
- простота программной реализации.

В качестве примера на рис. 6.2 приведена функция Харрингтона с двумя шкалами частных параметров – массой машины и потребляемой мощностью.

Кривой Харрингтона можно пользоваться как номограммой, но основное её значение – преобразование частных параметров в относительные безразмерные в математической модели объекта при его анализе и оптимизации. С помощью этой методики часто удается

найти компромиссные варианты при противоречивых требованиях к частным откликам.

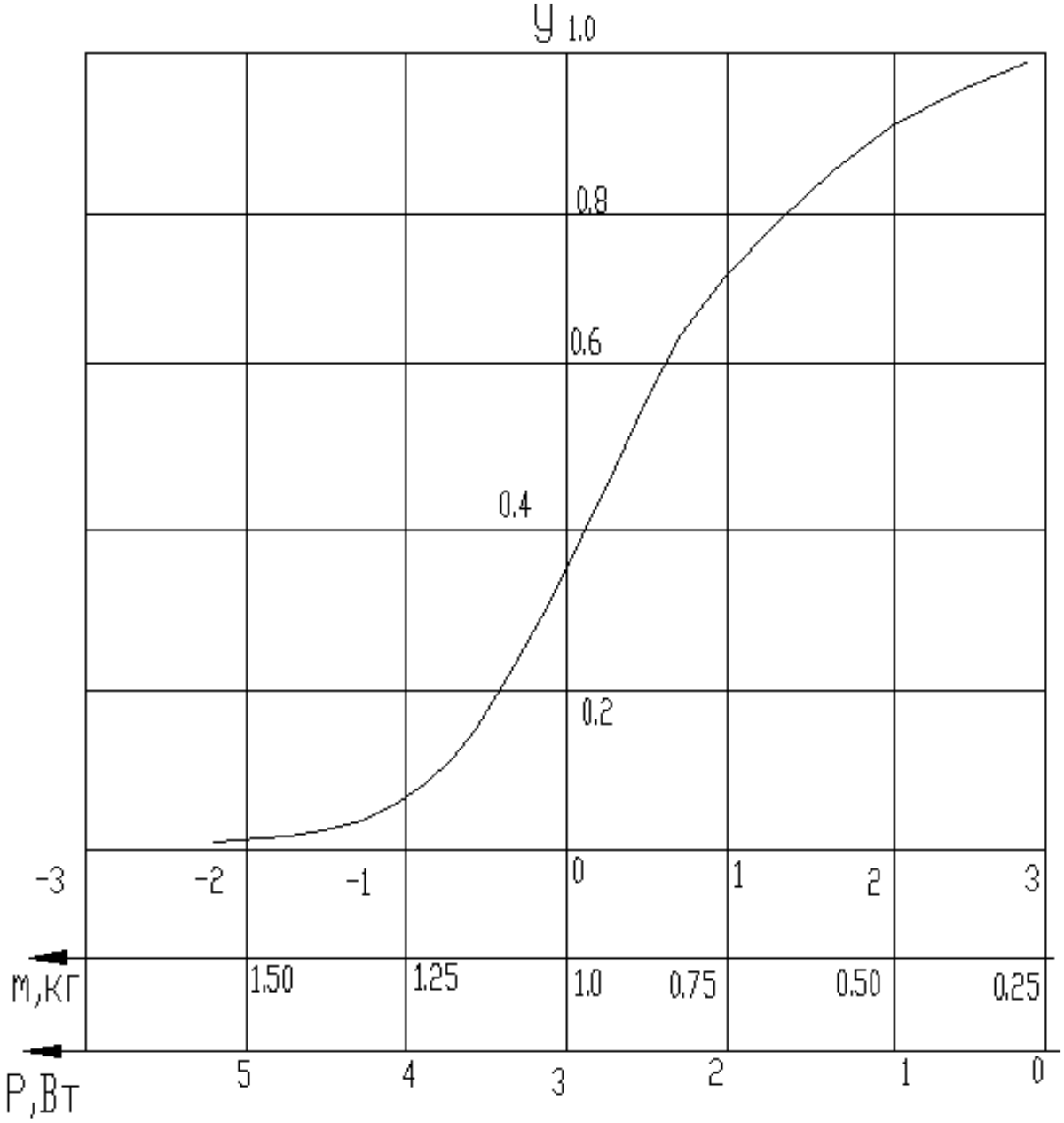


Рисунок 6.2 – Функция Харрингтона.

В МД с ограниченным углом поворота ротора могут возникнуть в зависимости от требований технического задания следующие варианты постановки задачи оптимизации:

1. Главный параметр оптимизации – масса двигателя, вспомогательные – габаритные размеры; варьируемые факторы – потребляемая мощность и размеры магнита.

2. Главный параметр – себестоимость машины, прямо зависимая от размеров магнита, а габариты и потребляемая мощность – параметры ограничители.

3. Главный параметр – габаритные размеры, вспомогательные – масса магнитов и полная масса машины; варьируемый фактор – потребляемая мощность.

Возможны и иные сочетания главных и вспомогательных параметров, но перечисленные определяют три основных подхода к расчету МД с ограниченным углом поворота ротора. Эти подходы рассмотрены далее.

6.3. Постановка задачи и выбор метода оптимизации.

Поиск экстремума функции отклика, как правило, начинается с исследования поверхностей отклика [1, 2]. В зависимости от рельефа поверхности, видов функций ограничителей выбирается тот или иной метод оптимизации. Критериями выбора метода оптимизации являются его работоспособность в условиях заданного рельефа, экономичность (время поиска экстремума), вероятность отыскания глобального оптимума при возможном наличии локальных экстремумов и т.д. Два основных класса методов оптимизации – направленного и случайного поиска имеют свои достоинства и недостатки [15]. Выбор метода определяется конкретной задачей, стоящей перед проектировщиком, и от этого выбора во многом зависит не только количество машинного времени, затраченного на создание проекта, но и вероятность отыскания глобального экстремума поверхности отклика, а, следовательно, и качества проекта в целом.

Математически задача сводится к минимизации целевой функции

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (6.4)$$

при m ограничениях – равенствах

$$\varphi_i(x_i) = 0, \qquad (i=1,2,...,m) \qquad (6.5)$$

и k ограничениях – неравенствах

$$\psi_j(x_j) \geq 0, \ (j=1,2,...,k) \qquad (6.6)$$

Допустимое решение этой задачи есть упорядоченное множество чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ удовлетворяющее ограничениям (6.5) и (6.6) – точка в n – мерном пространстве. Допустимое решение, минимизирующее целевую функцию (6.4), называется оптимальным решением (оптимальным планом).

Обычно оптимальное решение, если оно существует, единственно, однако возможны случаи, когда оптимальных решений бесчисленное множество. В задачах оптимизации электромеханических преобразователей такие случаи не встречаются. Чаще бывают случаи, когда множество $(x1, x2, \ldots, xn)$ оказывается пустым. Это происходит тогда, когда ограничения (6.5) и (6.6) заданы неоправданно жестко. Практически это означает, что двигатель с заданными требованиями в рамках выбранной структуры невозможно технически реализовать. Выход может быть найден при переходе к другой конструкции, или даже к другому типу машины – то есть к структурному синтезу.

Предварительное исследование поверхностей отклика МД показывает, что множество допустимых решений не пустое, а сами поверхности нелинейные. Исследованные районы поверхности отклика (не претендующие на полноту) имеют по одной области оптимума и, предположительно, по одному экстремуму. На поверхностях имеются криволинейные впадины, ограниченные более или менее крутыми склонами, “овраги” с относительно пологими краями. “хребтов” и “плоскогорий” обнаружено не было.

Рассмотрим основные методы поиска экстремума, которые возможно применить для поставленной задачи.

Первая группа методов – методы упорядоченного перебора или сетчатые методы. Достоинства и недостатки этих методов хорошо известны. Основное достоинство – при достаточно мелком шаге по каждому из факторов можно получить детальную картину поверхности отклика и с заданной точностью отыскать её оптимум. Но это возможно лишь при малом числе факторов и простой математической модели. При увеличении числа факторов и достаточно сложной модели сетчатый метод невозможно применить из-за физически нереализуемого количества испытаний. В применении к описываемой за-

даче с шестью варьируемыми переменными сетчатый метод оптимально использовать для предварительного исследования поверхностей отклика и для выяснения основных тенденций влияния факторов на параметр оптимизации. Для дальнейшей, более точной оптимизации МД, этот метод рекомендован быть не может.

Близки по объёму вычислений к сетчатым методам методы случайного поиска. Суть базового метода случайного поиска заключается в следующем. В области допустимых значений факторов выбирается некоторое количество случайных точек, и вычисляются для них значения выходного параметра. Затем варианты сортируются, и из них выбирается лучший. Критерии выбора числа испытаний и окончания поиска очень неопределенны, и говорить о достаточной вероятности отыскания оптимума можно лишь при количестве опытов, соизмеримом с количеством опытов сетчатого метода с мелким шагом для аналогичной задачи. Метод случайного поиска может быть модернизирован элементами направленного поиска, заключающегося в том, что задача разбивается на отдельные этапы. Вначале случайные точки “набрасываются” с достаточно крупным шагом, а затем подозрительные на экстремум области сужаются, и исследуются более тщательно. Это позволяет сократить число опытов, но метод теряет в большей мере своё основное преимущество – большую вероятность отыскания глобального экстремума при наличии локальных при полимодальной поверхности. Для рассматриваемой задачи метод случайного поиска не даёт преимуществ ни перед сетчатыми методами, ни перед методами направленного поиска.

Основное отличие методов направленного поиска экстремума заключается в том, что движение по направлению к экстремуму подчиняется некоторому алгоритму и корректируется по мере необходимости.

К методам направленного поиска относят в первую очередь симплекс - метод, градиентные методы, различные разновидности метода наискорейшего спуска (подъёма).

Симплекс-метод заключается в построении многогранника решений – симплекса. Число вершин многогранника равно $n+1$, где n –

число факторов. Так для двух факторов симплекс – это треугольник, для трёх – тетраэдр и т.д. Применение симплекс-метода начинается с выбора какого-либо допустимого базисного решения: выбирается точка факторного пространства по априорным данным близкая к зоне оптимума и в окрестностях этой точки строится базисный симплекс. Анализируются результаты решения в его вершинах, и затем симплекс поворачивается вокруг ребра, противоположного вершине с максимальным (при поиске минимума) значением параметра оптимизации. Получившееся решение сравнивается с базисным и снова определяется вершина симплекса с наибольшим значением целевой функции. Симплекс поворачивается снова вокруг ребра, противоположного "худшей" вершине. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут экстремум (идеальный случай), либо до тех пор, пока результаты не будут улучшаться из-за "зацикливания" решения, которое может произойти по нескольким причинам. Первая – размеры симплекса выбраны неоправданно большими, и он перекрывает зону оптимума, не попадая в его вершину. Вторая группа причин связана с характером рельефа. Симплекс не может работать на "плоскогорье", а также на поверхностях с локальными экстремумами. Поэтому симплекс-метод в математике в основном применяется в решении задач линейного программирования. Для решения нелинейной задачи оптимизации МД этот метод малопригоден.

Градиентные методы поиска оптимальных решений обладают перед перечисленными выше, особенно перед методами ненаправленного поиска, главным преимуществом, заключающемся в резком сокращении количества вычислений для достижения экстремума. Суть градиентных методов заключается в вычислении градиента функции цели либо на каждом шаге движения к экстремуму, либо после серии шагов, определённых стратегией поиска.

$$\overrightarrow{grad}(y) = \vec{i}\,\frac{\partial y}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial y}{\partial x_2} + ... + \vec{k}\,\frac{\partial y}{\partial x_n} \qquad (6.7)$$

Градиент показывает направление наискорейшего подъёма, а антиградиент, соответственно, спуска по поверхности отклика.

В задачах численной оптимизации обычно невозможно определить значение частных производных в выражении (6.7), поэтому их заменяют разностными отношениями

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_1}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_2}; \quad ...; \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_n} \qquad (6.8)$$

Разностные отношения (6.8) можно получить, если поочерёдно изменять только одну переменную. Очевидно, что для определения оценки градиента (антиградиента) на каждый шаг требуется провести *n* испытаний. Для того, чтобы двигаться по линии наискорейшего спуска, (точнее по ломаной линии, аппроксимирующей её) необходимо вычислять оценку градиента после каждого шага. Причем в [15] рекомендуется уменьшать величину шага по мере приближения к минимуму согласно тейлоровскому разложению $F(\lambda^{[j]})$, где λ- величина шага.

$$\lambda^{[j]} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x_k}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x_k \Delta x_h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x_k} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x_h}}, \ (j=0, 1, 2\ldots) \qquad (6.9)$$

где все разностные отношения вычисляются при $x_i=x_i^{[j]}$.

При достаточно большом числе независимых переменных объем вычислений становится значительным. Поэтому, обычно ”чистый” градиентный метод используется для оптимизации редко.

Более быструю сходимость дает метод Гаусса-Зейделя, в котором после определения оценки градиента движение производится только вдоль одной из осей при фиксированных остальных параметрах до тех пор, пока спуск эффективен. Затем изменяется следующий параметр и т.д. Метод Гаусса-Зейделя хорошо работает при относительно простых поверхностях типа сфероид, эллипсоид, параболоид и т.п., но если рельеф имеет искривлённый “овраг” или “седло” метод становится неработоспособным. Как показали предварительные исследования, поверхности отклика МД могут иметь “овраги”, следовательно, для них метод Гаусса – Зейделя использовать нельзя.

Для сокращения числа опытов по сравнению с “чисто” градиентным методом можно воспользоваться методом наискорейшего спус-

ка, в котором после расчёта оценки градиента в направлении антиградиента движение продолжается до тех пор, пока спуск эффективен. Затем направление корректируется после вычисления нового значения градиента. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при оптимизации случайных процессов, где он получил название – метод Бокса – Уилсона [2, 26]. При оптимизации МД задача, по сути, близка к задачам, для которых рекомендуется использовать этот метод. Метод Бокса – Уилсона уверенно работает при существенно криволинейных поверхностях. Следовательно, метод Бокса – Уилсона может быть рекомендован для оптимизации МД в сочетании с предварительным зондированием сетчатым методом и заключительным подробным исследованием зоны оптимума.

6.4. Оптимизация МД методом Бокса – Уилсона.

Как отмечалось выше, для осуществления метода наискорейшего спуска необходимо знать составляющие антиградиента функции (6.7). Когда это невозможно сделать, как в рассматриваемом случае, градиент заменяется его оценкой

$$\overrightarrow{grad}(y) \approx \hat{F}(x_{10}, x_{20}.....x_{n0}) \qquad (6.10)$$

в точке $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, которая называется точкой нулевого уровня и является исходной при движении по градиенту(антиградиенту). Приближение заключается в замене частных производных на конечные разностные отношения.

Метод Бокса – Уилсона состоит в повторении процедуры:

- построение факторного эксперимента в окрестности точки нулевого уровня;
- вычисление оценки градиента в этой точке по результатам эксперимента;
- крутое восхождение (спуск) в направлении оценки градиента (антиградиента);
- нахождение оценки максимума (минимума) функции отклика по этому направлению.

В дальнейшем будем рассматривать только метод наискорейшего спуска (движение по антиградиенту) для нахождения глобального

минимума функции цели, так как главные параметры МД – масса, масса магнитов и себестоимость – требуют минимизации.

6.4.1. Построение матрицы факторного эксперимента и вычисление оценки градиента.

Наиболее удобным инструментом для вычисления оценки градиента (6.10) является хорошо разработанный и апробированный метод факторного эксперимента [1, 2, 5], заключающийся в том, что в окрестностях точки нулевого уровня строится согласно матрице планирования эксперимента план, в вершинах которого рассчитывается значение функции цели. По этим значениям поверхность отклика в окрестностях нулевой точки заменяется аппроксимирующей плоскостью, коэффициенты наклона к осям которой дают оценку градиента в этой точке.

Первый этап – этап выбора исходной точки начала оптимизации. Так как мы получили достаточно полную предварительную информацию о поверхности отклика, то выбор исходной точки не представляет затруднений. Обычно выбирается точка, близкая к предполагаемому экстремуму. Но для проверки работоспособности алгоритма и исследования поверхности на возможные локальные экстремумы, целесообразно провести несколько серий крутых спусков с различными исходными точками.

Для примера выберем исходную точку с координатами:

$X_{10} = p = 2$; $X_{20} = P_0 = 25$ Вт; $X_{30} = l_m = 0{,}027$ м;

$X_{40} = b_m = 0{,}022$ м; $X_{50} = n_{сл} = 3$; $X_{60} = B_\delta = 0{,}45$ Тл.

Для интервалов варьирования примем следующие значения

$\Delta X_1 = 0$; $\Delta X_2 = 0{,}5$Вт; $\Delta X_3 = 0{,}0005$ м;

$\Delta X_4 = 0{,}0002$м; $\Delta X_5 = 0$; $\Delta X_6 = 0{,}002$ Тл.

Значения интервалов ΔX_1и ΔX_5равные нулю приняты из-за того, что при крупнодискретном изменении варьируемого параметра возможны “качания” решения.

Вторым этапом оптимизации методом наискорейшего спуска является формирование матрицы планирования эксперимента.

Известно, что для полного факторного эксперимента (ПФЭ), когда реализуются все возможные сочетания уровней факторов, необходимо выполнить

$$K=2^n \qquad (6.11)$$

опытов. Для рассматриваемой задачи n = 6, K = 64. Если учесть, что при движении к оптимуму придётся несколько раз корректировать направление, то количество расчётов становится внушительным.

Но для расчёта шести составляющих градиента 64 испытания излишни. Поэтому вместо ПФЭ проведём его четверть-реплику с шестнадцатью опытами. Для этого столбцы в матрице дробного факторного эксперимента $K=2^{6-2}$ (ДФЭ), соответствующие факторам X_5 и X_6 организуем, используя генерирующие соотношения:

$$X_5 = X1 \cdot X2 \cdot X_3 \cdot X_4 \qquad (6.12)$$

$$X_6 = X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \qquad (6.13)$$

Генерирующие соотношения высокого порядка взяты потому, что эффект тройного и, тем более, четверного, взаимодействия всегда меньше, чем парное влияние. В таблице 6.2 показана матрица ДФЭ $K = 2^{6-2}$.

Знаки ”+” соответствуют +1 в кодированных значениях, знаки “-” – (-1) (верхний и нижний уровень соответственно).

Каждая строка матрицы с соответствующим набором уровней факторов представляет собой один вариант расчёта параметра оптимизации.

Следующим этапом оптимизации является расчет разностных отношений, определяющих оценки градиента в точке нулевого уровня

$$b_j = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot k(i, j) \cdot \Delta x_j, \qquad (6.14)$$

где n – число опытов (в примере n = 16);

j – номер фактора;

i – номер опыта;

y_i – i-тое значение параметра оптимизации;

$k(i, j)$ – соответствующее кодированое значений фактора из матрицы ДФЭ; ($k(i, j)$ принимает значения ±1);

Δx_j – интервал варьирования j-того фактора.

Знак «минус» перед выражением (6.14) поставлен, чтобы b_j определяло значения оценок составляющих антиградиента для поиска минимума целевой функции.

После расчета разностных отношений b_j (в теории планирования эксперимента они называются коэффициентами регрессии) можно определить предварительные направления поиска экстремума. Положительные значения b_j соответствуют обратной зависимости y от x_j, следовательно, данный фактор в ходе минимизации у необходимо увеличивать, факторы у которых b_j отрицательный, нужно уменьшать.

Таблица 6.1.Матрица ДФЭ 2^{6-2}

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y
1.	-	-	-	-	+	-	y_1
2.	+	-	-	-	-	-	y_2
3.	-	+	-	-	-	+	y_3
4.	+	+	-	-	+	+	y_4
5.	-	-	+	+	+	-	y_5
6.	+	-	+	+	-	-	y_6
7.	-	+	+	+	-	+	y_7
8.	+	+	+	+	+	+	y_8
9.	-	-	-	+	-	+	y_9
10.	+	-	-	+	+	+	y_{10}
11.	-	+	-	+	+	-	y_{11}
12.	+	+	-	+	-	-	y_{12}
13.	-	-	+	-	-	+	y_{13}
14.	+	-	+	-	+	+	y_{14}
15.	-	+	+	-	+	-	y_{15}
16.	+	+	+	-	-	-	y_{16}

6.4.2. Движение по линии кратчайшего спуска.

Для движения по линии наикратчайшего спуска требуется выбрать масштаб шагов спуска. Эта операция трудно поддается формализации, а от ее удачного решения во многом зависит эффективность движения по поверхности отклика. При неоправданно мелком шаге на результат накладывается соизмеримая ошибка округлений и резко возрастает число вычислений, а при крупном шаге возникает вероятность на очередном шаге «перескочить» зону оптимума. Вследствие этого в предлагаемой программе оптимизации выбор масштаба шагов движения по линии ската осуществляется самим проектировщиком в диалоговом режиме.

Шаги движения по антиградиенту определяются выражениями (4.12, 4.14). Для первого шага.

$$x_{j(1)} = x_{j(0)} + \lambda_0(-\hat{grad}\, y) \qquad (6.15)$$

или $x_{j(1)} = x_{j(0)} + \lambda_0 \cdot b_j$; (6.16)

для $m+1$ –го шага

$$x_{j(m+1)} = x_{jm} + \lambda_m b_j, \qquad (6.17)$$

где λ_0–масштаб первого шага;

λ_m– масштаб m–го шага;

$x_{j(0)}$– нулевой уровень j-го фактора;

x_{jm}– значение x_j фактора на шаге m.

В выражениях (6.15) и (6.17) масштаб шага λ в общем случае может быть не одинаковым, но для варианта диалогового режима рациональнее принять для каждой серии расчетов $\lambda=const$.

Движение по антиградиенту продолжается пошагово до тех пор, пока спуск эффективен, то есть значение Y уменьшается.

Как правило, область оптимума может быть достигнута после первой серии расчетов только при простейших, близких к линейным, рельефах поверхности отклика. В более сложных, подобных рассматриваемой задаче оптимизации МД, требуется обычно несколько серий спуска с регулярной проверкой и уточнением направления антиградиента.

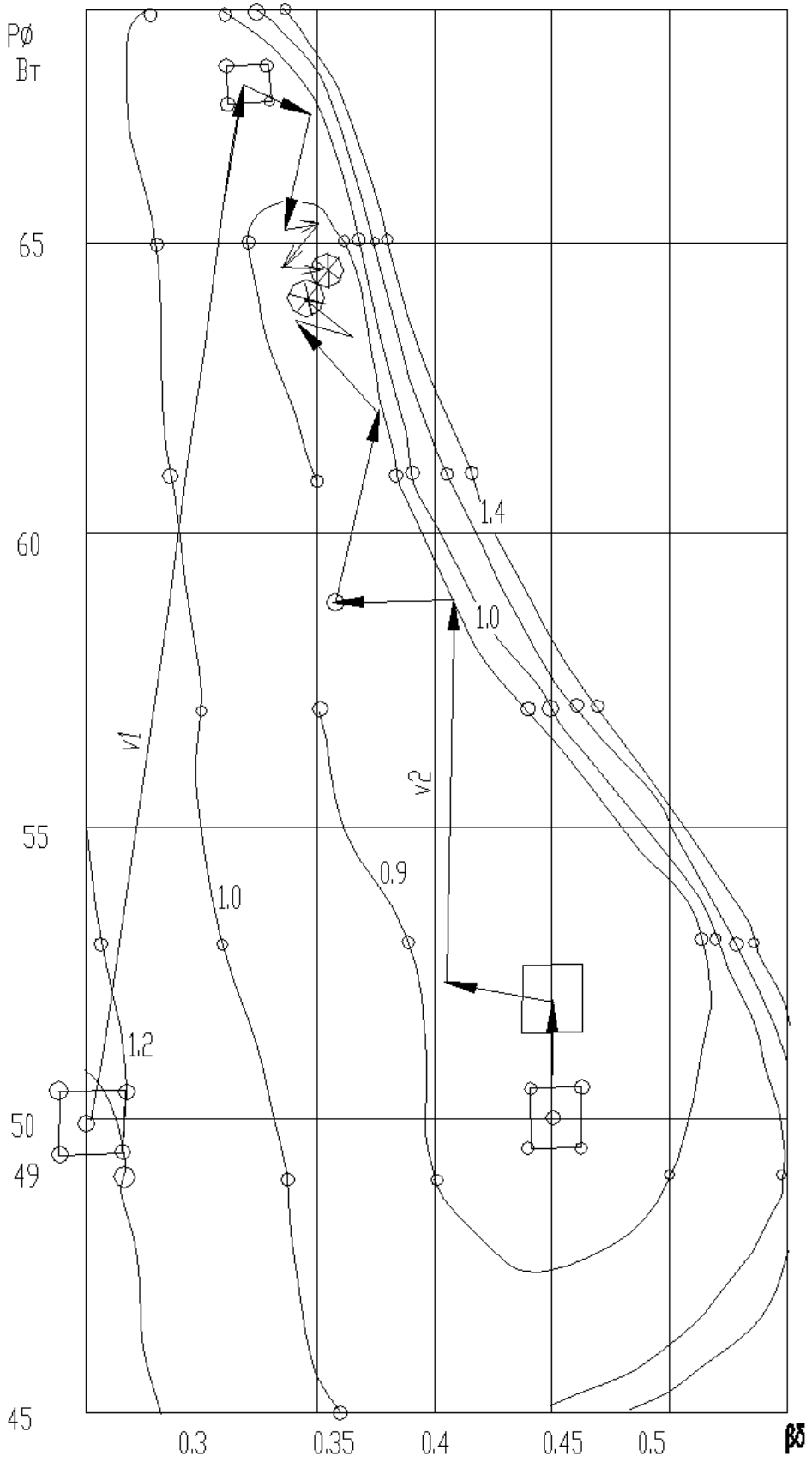


Рисунок 6.3 - Спуск по поверхности отклика $m_1=f(B_\delta, P_0)$ из разных исходных точек. M=1 Нм, p=2, l_m=0,027 м, b_m=0,022 м, $n_{сл}$=3.

Последовательность действий, при этом следующая:

1. При неэффективном m – ном шаге за лучшее значение принимается (m-1) – значение. Координаты этой точки считаются новым нулевым уровнем.
2. Строится матрица ДФЭ и рассчитывается составляющие антиградиента.
3. Выбирается масштаб шагов спуска по поверхности отклика.
4. Пошагово рассчитывается значение параметра оптимизации до тех пор, пока спуск эффективен.
5. При неудовлетворительном результате пункты 1- 4 повторяются до тех пор, пока не будет достигнут оптимум.

На рис. 6.3. и 6.4. показаны в качестве иллюстрации пути движения по поверхности отклика для двух пар варьируемых параметров. Для проверки достоверности полученного результата исходные точки выбирались в разных областях поверхности отклика. Как показали расчеты, линии движения по антиградиенту сходятся в одну область оптимума, что подтверждает надежность метода.

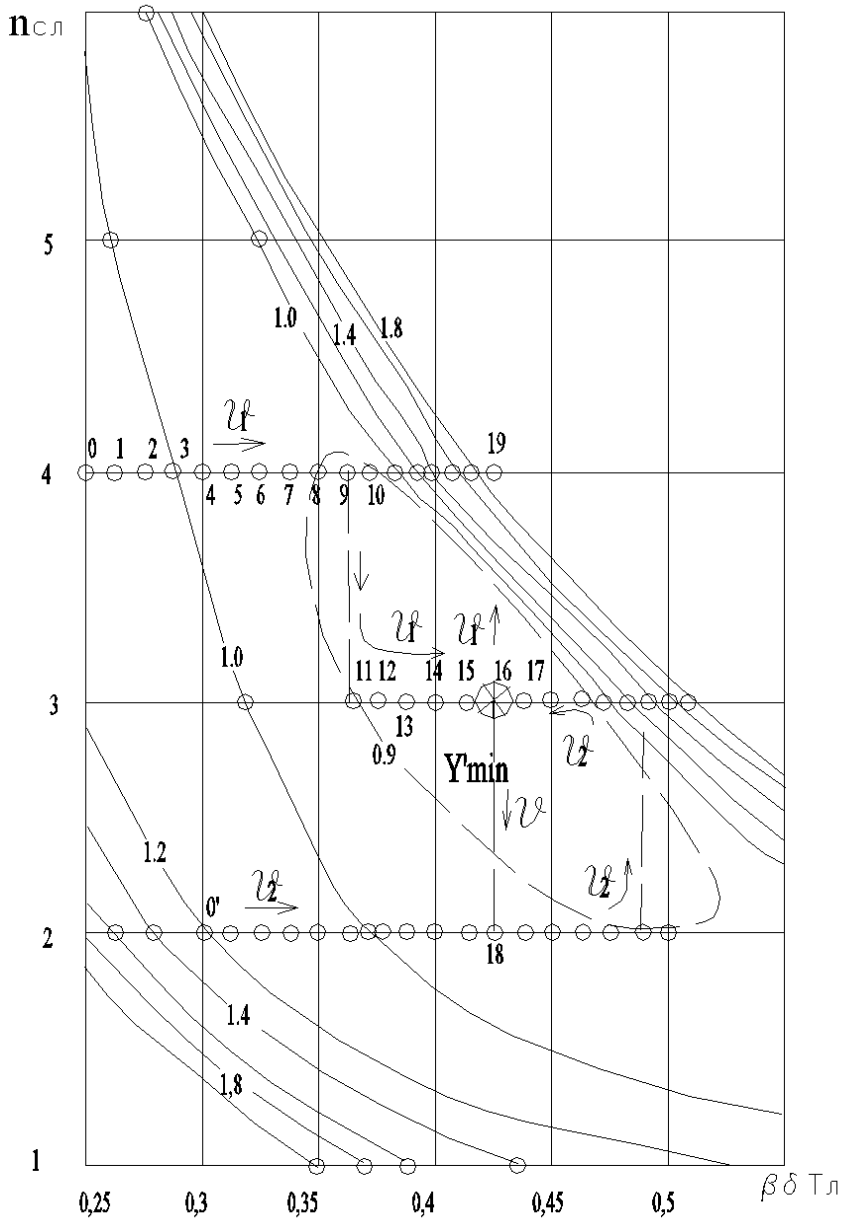


Рисунок 6.4 - Спуск по поверхности отклика при одном дискретном параметре $m_1=f(B_\delta, n_{сл})$.

M=1 Нм, p=2, l_m=0,027 м, b_m=0,022 м, $P0=57$ Вт, $2p$=4.

6.5. Результаты оптимизационного проектирования двигателей МД-100-1 и МД – 6.

Матрица ДФЭ для двигателя МД-100-1 (номинальные параметры которого приведены в предыдущем разделе) имеет вид, представленный в табл. 6.3. В последней графе приведены результаты расчета параметра оптимизации – полной массы машины.

По знаниям y_j рассчитывались согласно выражению (6.14.) составляющие градиента b_j.

Таблица 6.3 -Исходная матрица ДФЭ для двигателя МД-100-1.

x_j / i	X_1	X_2, Вт.	X_3, м.	X_4, м.	X_5	X_6, Тл	Y, кг.
1.	2	24,5	0,0265	0,0158	3	0,448	2,19
2.	2	24,5	0,0265	0,0158	3	0,448	2,04
3.	2	25,5	0,0265	0,0158	3	0,452	1,87
4.	2	25,5	0,0265	0,0158	3	0,452	1,93
5.	2	24,5	0,0275	0,0162	3	0,448	1,92
6.	2	24,5	0,0275	0,0162	3	0,448	2,03
7.	2	25,5	0,0275	0,0162	3	0,452	1,81
8.	2	25,5	0,0275	0,0162	3	0,452	1,75
9.	2	24,5	0,0265	0,0162	3	0,452	1,97
10.	2	24,5	0,0265	0,0162	3	0,452	1,88
11.	2	25,5	0,0265	0,0162	3	0,448	1,72
12.	2	25,5	0,0265	0,0162	3	0,448	1,79
13.	2	24,5	0,0275	0,0158	3	0,452	1,79
14.	2	24,5	0,0275	0,0158	3	0,452	1,84
15.	2	25,5	0,0275	0,0158	3	0,448	1,66
16.	2	25,5	0,0275	0,0158	3	0,448	1,62

Таблица 6.4 - Первый этап крутого спуска по поверхности отклика.

x_j		X_1	X_2, Вт.	X_3, м.	X_4, м.	X_5	X_6, Тл	Y, *кг*
b_j		0	$4{,}74\ 10^{-2}$	$3{,}09\ 10^{-5}$	$1{,}58\ 10^{-5}$	0	$8{,}12\ 10^{-5}$	-
λb_j		0	2,37	$1{,}55\ 10^{-3}$	$0{,}79\ 10^{-3}$	0	$4{,}06\ 10^{-3}$	-
№ шага		Крутой спуск по поверхности отклика						
Первая серия	1.	2	27,37	0,0285	0,0168	3	0,454	1,858
	2.	2	29,74	0,0301	0,0176	3	0,458	1,334
	3.	2	32,11	0,0316	0,0184	3	0,462	1,240
	4.	2	34,48	0,0332	0,0192	3	0,464	1,187
	5.	2	36,85	0,0347	0,0200	3	0,470	1,138
	6.	2	39,22	0,0363	0,0208	3	0,474	1,129
	7.	2	41,59	0,0378	0,0215	3	0,478	1,112
	8.	2	42,22	0,0372	0,0215	3	0,478	1,126
Вторая серия	9.	2	41,59	0,0378	0,0215	3	0,478	1,112
	10.	2	43,48	0,0361	0,0214	3	0,478	1,100
	11.	2	44,10	0,0356	0,0213	3	0,477	1,086
	12.	2	44,73	0,0350	0,0213	3	0,477	1,073
	13.	2	45,36	0,0344	0,0212	3	0,477	1,060
	14.	2	45,99	0,339	0,0212	3	0,476	1,051
	15.	2	46,62	0,0333	0,0211	3	0,476	1,035
	16.	2	47,25	0,0328	0,0211	3	0,476	1,023
	17.	2	47,88	0,0322	0,0211	3	0,475	1,013
	18.	2	49,50	0,0317	0,0210	3	0,475	1,001
	19.	2	49,13	0,0311	0,0210	3	0,475	0,99
	20.	2	49,76	0,0305	0,0203	3	0,474	0,98
	21.	2	50,39	0,0300	0,0209	3	0,474	0,97
	22.	2	51,02	0,0294	0,0208	3	0,474	0,94
	23.	2	51,65	0,0289	0,0208	3	0,473	0,93

Значения остальных коэффициентов и соответствующих им шагов крутого спуска даны в таблице 6.4. Там же представлены результаты первых двух этапов крутого спуска.

На первом этапе математическая модель линеаризована управлением регрессии

$$\hat{y} = -0{,}0474x_2 - 3{,}09 \cdot 10^{-5}x_3 - 1{,}58 \cdot 10^{-5}x_4 - 8{,}12 \cdot 10^{-5}x_6 \qquad (6.16)$$

Как видно из результатов первого этапа – область оптимума не достигнута. Поэтому крутой спуск повторялся несколько раз с поэтапным уточнением направления градиента. В ходе оптимизационного расчета были выбраны варианты двигателей МД–100–1 и МД–6 с основными техническими параметрами, приведенными в таблице 6.5.

Таблица 6.5 - Основные параметры разрабатываемых двигателей МД и серийных двигателей ДБМ.

№	Тип	Тип статора	$M_п$, $Н_м$	$M_п$, $Н_м$	2p	$I^*_п$, А	$P_{1п}$, Вт	Т эм, мс.	$J_р$, $кг \cdot м^2$	m1, кг.	mm,кг
1	ДБМ-120-1-0,2-2	пазов.	1	1,19	16	1,2	67,5	0,6	$1 \cdot 10^{-3}$	1,3	0,20
2	ДБМ-105-0,6-0,5-3	глад.	0,6	1,17	16	2,7	175	0,10	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	1,3	0,32
3	ДБМ-150-4-0,3-2	пазов.	4	6,7	16	9,6	520	1,2	$3 \cdot 10^{-3}$	3,0	0,46
4	МД-100-1	глад.	1	1	4			0,12		0,9	0,15
5	МД-6	глад.	6	6				0,4			

По результатам расчета были проведены опытно-конструкторские работы совместно с ЦКБ «Фотон» г. Казань и были изготовлены опытно-промышленные партии двигателей МД–100-1 и МД–6. Испытания, проведенные в заводских условиях и на полигоне, показали полное соответствие разработанных двигателей техническому заданию. По ряду показателей двигатели МД превосходят серийные аналоги (см. табл. 6.5 и 6.6).

Таблица 6.6.Параметры моментных двигателей.

Параметры	ДБМ 120		МД 100 - 1
	Пазовый	Беспазо-вый	
Пульсации вращающего момента при номинальном моменте, %. (В диапазоне рабочего угла)	10	5	2
Нелинейность зависимости статистического синхронизирующего момента от тока, %.	7,5	5	2,5
Время работы в пусковом режиме до достижения максимального допустимого перегрева обмотки без дополнительного теплоотвода, мин.	30	12	Не ограничено
Максимально допустимая температура обмотки, ^{0}C.	150	120	120

7. Метод наименьших квадратов

7.1 Методы аппроксимации опытных данных

Если некоторая физическая величина зависит от другой величины, то эту зависимость можно исследовать, измеряя *y* при различных значениях *x*. В результате измерений получается ряд значений:

$x_1, x_2, \cdots x_i \cdots x_N$

$y_1, y_2, \cdots y_i \cdots y_N$

По данным такого эксперимента можно построить график зависимости $y = f(x)$. Полученная кривая дает возможность судить о виде функции $f(x)$. Однако постоянные коэффициенты, которые входят в эту функцию, остаются неизвестными. Определить их позволяет метод наименьших квадратов, который был развит усилиями Лежандра и Гаусса более 150 лет назад [15]. Суть метода наименьших квадратов (МНК) заключается в минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных.

Рассмотрим простейший случай: один фактор, линейная модель, следовательно, функция отклика (уравнением регрессии) имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 \qquad (7.1)$$

Это уравнение прямой линии. Неизвестные коэффициенты здесь b_0 и b_1, для их вычисления воспользуемся результатами эксперимента.

Допустим, что все экспериментальные точки лежат строго на прямой линии, то для каждой из них справедливо равенство:

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = 0$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$ – номер опыта. В этом случае нет никакой проблемы. На практике же это равенство нарушается:

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = \xi_i \qquad (7.2)$$

где ξi – разность между экспериментальным и вычисленным по урав-

нению регрессии значениями y в i-й экспериментальной точке. Эту величину иногда называют невязкой.

Действительно, невязка возникает по двум причинам: из-за ошибки эксперимента и из-за непригодности модели. Причем эти причины смешаны и экспериментатор не может, не получив дополнительной информации, сказать, какая из них преобладает.

Возможно два варианта: в первом случае допустим, что модель пригодна. Тогда невязка будет порождаться только ошибкой опыта. Во втором – что ошибка опыта равна нулю. Тогда невязка будет связана только с пригодностью модели, и пригодной будет такая модель, для которой все невязки равны нулю.

Обычно оценивают независимо ошибку опыта и проверяют пригодность модели.

При обработке результатов необходимо найти такие коэффициенты регрессии, при которых невязки будут минимальны. Это требование можно записать по-разному. В зависимости от этого будут получены разные оценки коэффициентов. Одна из возможных записей:

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \min \tag{7.3}$$

приводит к методу наименьших квадратов.

Возможен и метод наименьших кубов:

$$U = \sum_{i=1}^{N} \left| \xi_i^3 \right| = \min$$

так как условие, которое выбирает экспериментатор, в общем случае, произвольно.

Однако, он по сравнению с МНК этот метод имеет недостатки: снижается точность оценок коэффициентов, кроме того в вычислительном отношении этот путь сложнее.

Существует и метод, в котором минимизируется сумма модулей (абсолютных величин) невязок. Но этот путь связан с дополнительными вычислительными трудностями. Условие МНК – это удачный компромисс.

В последнее время были предложены и другие подходы. Можно, например, минимизировать модуль максимальной невязки: $\min \max_i |\xi_i|$

Таким образом, для обработки результатов экспериментов существует множество методов, остановимся подробнее на методе наименьших квадратов.

При проведении эксперимента обычно стремятся провести больше (во всяком случае не меньше) опытов, чем число неизвестных коэффициентов. Поэтому система линейных уравнений $\xi_i = y_i - b_0 - b_1 x_{1i}$
оказывается переопределенной и часто противоречивой (т. е. она может иметь бесконечно много решений или может не иметь решений). Переопределенность возникает, когда число уравнений больше числа неизвестных; противоречивость – когда некоторые из уравнений несовместимы друг с другом.

Только если все экспериментальные точки лежат на прямой, то система становится определенной и имеет единственное решение.

МНК обладает тем замечательным свойством, что он делает определенной любую произвольную систему уравнений. Он делает число уравнений равным числу неизвестных коэффициентов.

Рассматриваемое уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1$$

В нем два неизвестных коэффициента. Следовательно, применяя МНК, получим два уравнения. Преобразуем уравнение (7.3) подставив в него (7.2), получим [2]:

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i} \right)^2 = \min \tag{7.4}$$

Минимум некоторой функции, если он существует, достигается при одновременном равенстве нулю частных производных по всем неизвестным, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial b_0} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial b_1} = 0 \tag{7.5}$$

Продифференцируем уравнение (7.4) в соответствии с (7.5), получим [2]:

$$-2\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i} \right) = 0, \quad -2\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i} \right) \cdot x_{1i} = 0$$

Для вычислений удобно раскрыть скобки и провести простые преобразования, которые дают

$$N \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{N} x_{1i} b_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad \sum_{i=1}^{N} x_{1i} b_0 + \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 b_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}$$

Окончательные формулы для вычисления коэффициентов регрессии, которые удобно находить с помощью определителей, имеют вид [2]:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{1i}}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i} \right)^2} \tag{7.6}$$

$$b_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{1i}}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i} \right)^2} \tag{7.7}$$

Таблица 7.1

Условия и результаты опытов

Номер опыта	x_1	y_1
1	x_{11}	y_{11}
2	x_{12}	y_{12}
.	.	.
$i.$	x_{1i}	y_{1i}
.	.	.
N	x_{1N}	y_{1N}

Результаты эксперимента представляются следующей матрицей (табл. 7.1). Для выполнения вычислений ее расширяют так, как представлено в табл. 7.2.

В таблице 7.2 сделано больше вычислений, чем требуется для расчета b_0 и b_1. Эти «лишние» данные нужны для проверки правильности расчетов.

Возможны два способа проверки. Первое из условий [2]:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(x_{1i}+y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^2+2\sum_{i=1}^{N}y_1x_{1i}+\sum_{i=1}^{N}y_i^2$$

которое должно выполняться не только для сумм, но и в каждой строчке таблицы. Второй способ использует условие $\bar{y}=b_0+b_1\bar{x}_1$. Подставляя в это соотношение $\bar{y}$ и $\bar{x}_1$ из последней строки таблицы и один из коэффициентов, можно найти другой коэффициент и сравнить с расчетным. Вторая из проверок является наиболее полной, наиболее жесткой. Она проверяет не только вычисления сумм, но и вычисления коэффициентов.

Таблица 7.2– Вычисление коэффициентов регрессии

Номер опыта	x_1	y	x_1^2	yx_1	y^2	x_1+y	$(x_1+y)^2$

1	x_{11}	y_1	x_{11}^2	$y_1 x_{11}$	y_1^2	$x_{11} + y_1$	$(x_{11} + y_1)^2$
2	x_{12}	y_2	x_{12}^2	$y_2 x_{12}$	y_2^2	$x_{12} + y_2$	$(x_{12} + y_2)^2$
.	.	.	.	.	.	.	.
i	x_{1i}	y_i	x_{1i}^2	$y_i x_{1i}$	y_i^2	$x_{1i} + y_i$	$(x_{1i} + y_i)^2$
.	.	.	.	.	.	.	.
N	x_{1N}	y_N	x_{1N}^2	$y_N x_{1N}$	y_N^2	$x_{1N} + y_N$	$(x_{1N} + y_N)^2$
$\sum$	$\sum_{i=1}^{N} x_{1i}$	$\sum_{i=1}^{N} y_i$	$\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2$	$\sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}$	$\sum_{i=1}^{N} y_i^2$	–	$\sum_{i=1}^{N} (x_{1i} + y_i)^2$
Среднее значение	$\overline{x_1}$	$\bar{y}$					

На практике используют обе проверки, чтобы в случае ошибок в таблице не считать зря коэффициенты.

Имейте в виду: никакая проверка не гарантирует вас от ошибок в записи исходных данных. Будьте внимательны!

Имейте в виду: никакие результаты вычислений нельзя ни использовать, ни даже обсуждать, пока они не проверены. Иначе вы рискуете впасть в заблуждение и, в лучшем случае, потерять время.

Нанесем исходные данные и полученное уравнение на график (рис. 7.1).

Выделим для удобства рассмотрения несколько экспериментальных точек и отрезок уравнения (7.1) в большем масштабе (рис. 7.1 б).

Рассмотрим пять экспериментальных точек, которые пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Четвертая точка оказалась лежащей на линии. МНК состоит в том, чтобы минимизировать сумму квадратов отрезков, характеризующих расхождение между экспериментальными точками и полученным уравнением. Для уравнения 7.1 минимизи-

руется сумма квадратов пунктирных отрезков. Если бы рассматриваемое уравнение регрессии имело вид:

$$x_1 = b_0 + b_1 y$$

то минимизировалась бы сумма сплошных отрезков.

Во всех формулах тогда пришлось бы x_1 и y поменять местами и коэффициенты получились бы другими (если, конечно, не все невязки равны нулю).

Находим невязки по оси *y*, поэтому минимизируется сумма квадратов вертикальных отрезков. Обе линии совпадут только в том случае, если все невязки равны нулю, т. е. если все экспериментальные точки лежат точно на прямой линии.

Определим сумму квадратов невязок. Назовем ее остаточной суммой квадратов.

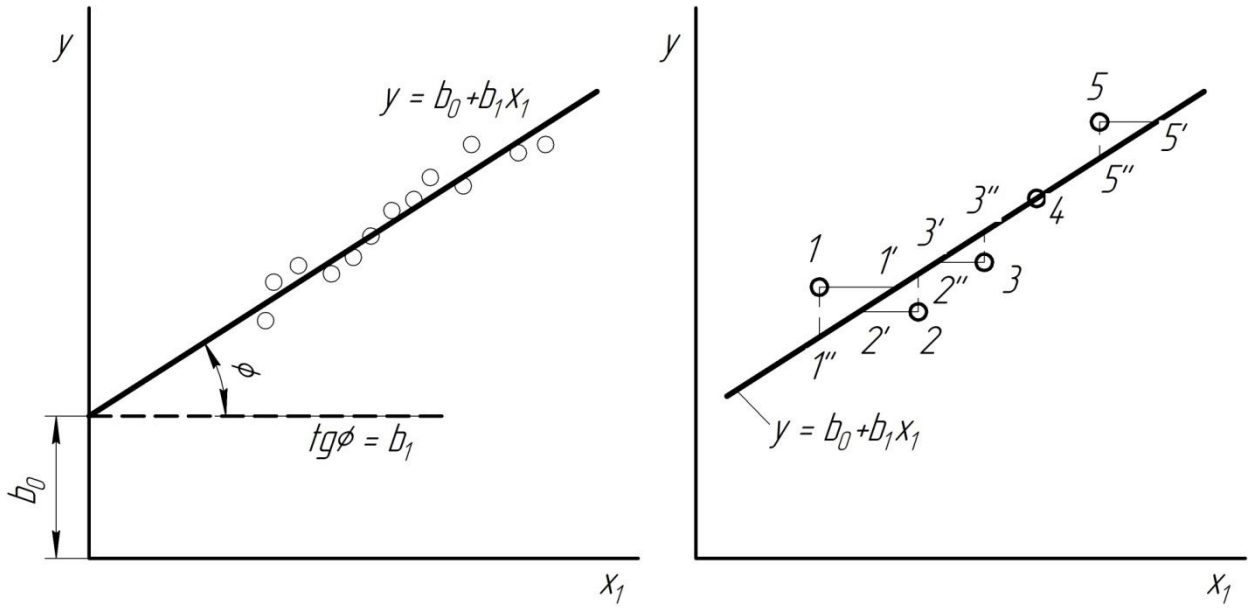


Рисунок 7.1 – Линейное уравнение регрессии

Из рисунков видно, что для этого надо вычислить по уравнению значения y в условиях каждого опыта. Будем называть такое значение предсказанным и обозначать $\hat{y}$. Затем надо найти все невязки (отрезки), возвести их в квадрат и сложить (табл. 7.3).

Таблица 7.3 – Расчет остаточной суммы квадратов

Номер опыта	y	$\hat{y}$	$\Delta y = y - \hat{y}$	Δy^2
1	y_1	$\hat{y}_1$	Δy_1	Δy_1^2
2	y_2	$\hat{y}_2$	Δy_2	Δy_2^2
.	.	.	.	.
i	y_i	$\hat{y}_i$	Δy_i	Δy_i^2
.	.	.	.	.
N	y_N	$\hat{y}_N$	Δy_N	Δy_N^2
				$\sum_{i=1}^{N} \Delta y_i^2$

Величина $\sum_{i=1}^{N} \Delta y_i^2$ и есть остаточная сумма квадратов, которая выше была обозначена $\sum_{i=1}^{N} \Delta \xi_i^2$. МНК гарантирует, что эта величина минимально возможная.

Выше рассмотрен поиск наилучших в смысле МНК оценок коэффициентов линейного уравнения для одного фактора. Далее оценим метод наименьших квадратов для многофакторных задач.

Обобщение на многофакторный случай не связано с какими-либо принципиальными трудностями. Однако вычисления значительно усложняются и требуют привлечения аппарата алгебры матриц. Воспользуемся тем, что матрицы планирования ортогональны. Далее будем рассматривать только этот случай, который позволяет резко упростить вычисления, что составляет одно из преимуществ планирования эксперимента.

Покажем, что для любого числа факторов коэффициенты будут вычисляться по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ji}}{N}$$

В этой формуле $j = 0, 1, 2$ ..., k – номер фактора. Ноль записан для вычисления b_0. Действительно, из формул (7.6) и (7.7) для вычисления коэффициентов регрессии следует:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{1i} = 0$$

в силу симметричности плана. Поэтому после сокращения формулы приобретают вид [2]:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}, \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}}{\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2}$$

где

$$\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 = N$$

что совпадает с написанным выше.

Так как каждый фактор (кроме x_0) варьируется на двух уровнях +1 и -1, то вычисления сводятся к приписыванию столбцу *y* знаков соответствующего фактору столбца и алгебраическому сложению полученных значений. Деление результата на число опытов в матрице планирования дает искомый коэффициент.

При вычислениях линейных моделей по дробным репликам никаких особенностей не появляется. Дополнительные трудности возникают, при поиске коэффициентов неполного квадратного уравнения. Тогда уравнение регрессии будет иметь вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \cdots + b_{k-1,k} x_{k-1} x_k$$

Конечно, можно интересоваться не всеми эффектами взаимодействия, а только определенными. В полном факторном эксперименте можно оценить все взаимодействия. Для дробных реплик это не так.

При построении полуреплики 2^{4-1} с определяющим контрастом $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$, раздельных оценок b_{12} и b_{34} получить нельзя, так как имеет место соотношение $x_1 x_2 = x_3 x_4$. В этом можно легко убедить-

ся, если выписать столбцы интересующих нас эффектов. А это необходимо для вычисления коэффициентов. В этом случае столбец x_1x_2 совпадает со столбцом x_3x_4. Формула для вычислений коэффициентов:

$$b_{ui} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ui} x_{ji}}{N}$$

здесь $u, j = 1, 2, \cdots, k$ — номера факторов, $u \neq j$. В силу ортогональности эффекты взаимодействия оцениваются независимо от линейных эффектов.

7.2. Метод наименьших квадратов для одного фактора (пример 7.1)

На рис.7.2 точками показаны значения *y* в зависимости от *x*, полученные в результате эксперимента. Так как явно прослеживается линейная зависимость, полагаем, что уравнение этой зависимости имеет вид: $y = b_0 + b_1x_1$ (прямая линия), здесь неизвестны коэффициенты b_0 и b_1. Для их определения воспользуемся методом наименьших квадратов.

В результате проведенного эксперимента была получена следующая таблица, аналогичная табл. 7.1, в которой x_1 принимает девять кодированных значений (см. табл. 7.4). Произведем вычисления в соответствии с предписанием табл. 7.2.

Таблица 7.4

Расчетная таблица вычисления коэффициентов регрессии

Номер опыта	x_1	y	x_1^2	yx_1	y^2	$x_1 + y$	$(x_1 + y)^2$
1	-4	1,5	16	-6	2,25	-2,5	6,25
2	-3	1,1	9	-3,3	1,21	-1,9	3,61
3	-2	2,2	4	-4,4	4,84	0,2	0,04
4	-1	2,2	1	-2,2	4,84	1,2	1,44
5	0	2	0	0	4	2	4
6	1	3	1	3	9	4	16

7	2	3,6	4	7,2	12,96	5,6	31,36
8	3	3,1	9	9,3	9,61	6,1	37,21
9	4	4	16	16	16	8	64
Σ	0	22,7	60	19,6	64,71	22,7	163,91

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} = \frac{22{,}7 \cdot 60 - 19{,}6 \cdot 0}{9 \cdot 60 - 0} = 2{,}52$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} = \frac{9 \cdot 19{,}6 - 22{,}7 \cdot 0}{9 \cdot 60 - 0} = 0{,}33$$

Таким образом, уравнение зависимости принимает следующий вид:

$$y = 2{,}52 + 0{,}33 \cdot x_1.$$

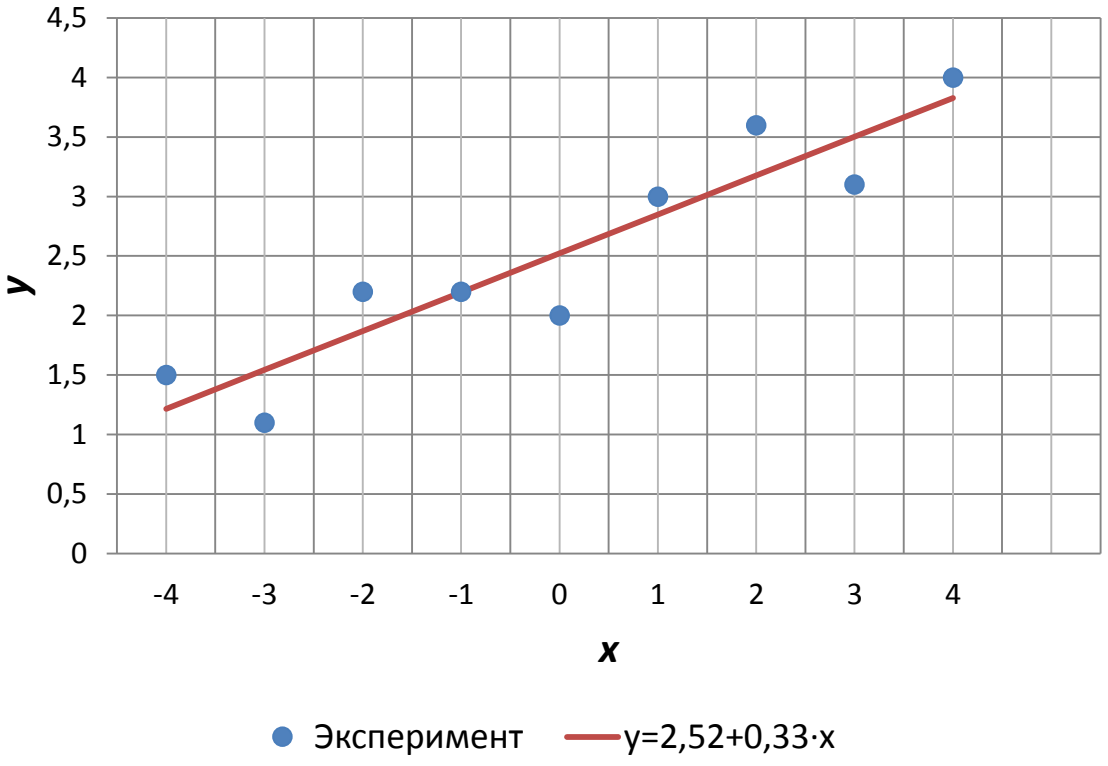


Рисунок 7.2 –Уравнение линейной зависимости, найденное при помощи метода наименьших квадратов

В результате вычислений с помощью метода наименьших квадратов определены неизвестные коэффициенты уравнения линейной

зависимости $y = f(x)$, установленной по итогам эксперимента. На рис.7.2 построен график искомого уравнения. МНК гарантирует, что сумма всех отклонений между экспериментальными данными (точками) и построенной зависимостью (прямой) минимальна.

8. Темы практических занятий

Практические занятия необходимы для формирования у студентов компетенций по владению и умению применения математического метода планирования эксперимента при проведении научных и практических исследований. Предлагаемые темы практических занятий рассчитаны на продолжительность в два - четыре академических часа. Занятия строятся на исследовании симуляционных моделей электромеханических преобразователей. Компьютерное моделирование дает возможность решения учебных задач оптимизационных экспериментов, приближенных к задачам, которые возникают при исследовании реальных процессов и объектов электромеханики и электроэнергетики.

Практическое занятие № 1.
Тема: Обработка результатов эксперимента и их графическое отображение на ПК.

Цель занятия.

Получение навыков обработки экспериментальных данных и отображения их в графическом виде.

1. Теоретическое описание.

Было проведено испытание однофазного трансформатора при различных значениях и видах нагрузки: активной R, активно-индуктивной X_L и активно − емкостной X_C. (Рис.8.1).

Номинальные данные трансформатора.

Номинальное первичное напряжение $U_1 = 220\ B = const.$
Номинальный вторичный ток (ток нагрузки) $I_{2ном} = 6\ A.$
Активное сопротивление первичной обмотки $r_1 = 4{,}23\ Ом.$
Активное сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 1{,}41\ Ом.$
Магнитные потери в сердечнике $\Delta p_{магн} = 39\ Bm = const.$

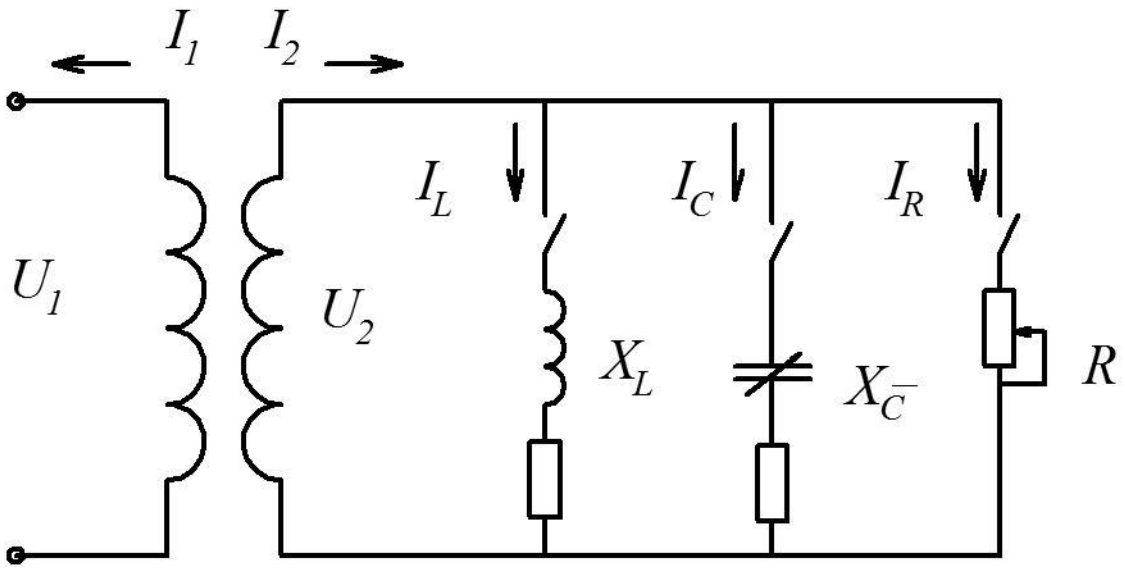


Рисунок 8.1 – Схема испытания трансформатора

Экспериментально были получены следующие результаты (табл.8.1).

Табл.8.1

Результаты испытания трансформатора

Эксперимент						
№ опыта	**I_2, А**	**U_{2C}, В**	**U_{2L}, В**	**U_{2R}, В**	**I_1, А**	**P_2, Вт**
1	0	140	140	140	0,4	0
2	1,5	141	136	137	1,27	130
3	3	142	132	136	2,13	298
4	4,5	143	129	133	3,27	525
5	6	144	123	128	4,4	730
6	7,5	147	110	118	5,89	990

2. Обработка результатов эксперимента

Расчетные формулы

1. Коэффициент нагрузки

$$k_{\text{нг}} = \frac{I_2}{I_{2\,\text{ном}}}$$

2. Электрические потери в первичной и вторичной обмотках, Вт

$$\Delta p_{эл1} = I_1^2 \cdot r_1$$

$$\Delta p_{эл2} = I_2^2 \cdot r_2$$

3. Подводимая мощность

$$P_1 = P_2 + \Delta p_{магн} + \Delta p_{эл1} + \Delta p_{эл2}$$

4. Коэффициент полезного действия (КПД), о.е.

$$КПД = \frac{P_2}{P_1}$$

5. Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{P_1}{U_1 \cdot I_1}$$

Задание

1. Рассчитать по приведенным формулам расчетные величины и занести их в таблицу 8.2.

Расчет Таблица 8.2

$k_{нг}$	$\Delta p_{эл1}$, Вт	$\Delta p_{эл2}$, Вт	P_1, Вт	КПД, о.е.	$\cos\varphi$, о.е.

2. 2.1. Построить графики в одних координатных осях $КПД = f(k_{нг})$ и $\cos\varphi = f(k_{нг})$.
   2.2. Построить графики в одних координатных осях $U_{2c}, U_{2L}, U_{2R} = f(k_{нг})$
   2.3. Сделать выводы по работе.
3. Подготовить отчет о выполненной работе.

Практическое занятие № 2.

Тема: Построение матрицы ПФЭ и крутое восхождение по поверхности отклика

1. **Цель занятия.**

Освоение навыков построения матрицы полного факторного эксперимента и проведения оптимизационного эксперимента методом Бокса-Уилсона на примере оптимизации трансформатора по массе при варьировании трех факторов в ходе расчетного эксперимента.

2. **Теоретическое описание.**

Объект исследования – трехфазный трансформатор.

Параметр оптимизации – масса активных частей трансформатора.

Варьируемые факторы:

- индукция в стержне трансформатора, *Bc*, Тл; (фактор x_1);
- расчетный диаметр стержня, *Dc*, м; (фактор x_2);
- плотность тока в обмотке, *j*, А/мм^2; (фактор x_3).

Известна следующая априорная информация об исследуемом трансформаторе, полученная из опыта проектирования аналогичных устройств.

Факторы имеют следующие диапазоны варьирования:

- индукция в стержне трансформатора, B_c = [0,2–2,2] Тл;
- расчетный диаметр стержня, D_c = [0,1–0,5] м;
- плотность тока в обмотке, j = [2–15] А/мм^2.

Лучший аналог имеет массу активных частей m = 1020 кг.

Задача исследования – найти значения варьируемых факторов, при которых достигается минимальное значение выходного параметра (массы активных частей трансформатора). Полученное значение массы должно быть не больше, чем у лучшего аналога.

Примечание: Уравнение математической модели (ММ) зависимости параметра оптимизации от варьируемых факторов задает преподаватель (Табл.3).

3. Проведение расчетного эксперимента

Построение матрицы ПФЭ.

Порядок построения матрицы ПФЭ.

1. Необходимо выбрать нулевой уровень значений варьируемых факторов (x_{10}, x_{20}, x_{30}). Он выбирается по методике [2]. Как правило, за нулевой уровень фактора принимается значение, которое имеет лучший аналог. Если такая информация отсутствует, то обычно выбирается величина из середины диапазона допустимых значений данного фактора.
2. Выбор шагов варьирования факторов (dx_1, dx_2, dx_3).
   Шаги варьирования выбираются таким образом, чтобы верхний и нижний уровень фактора не выходили за область определения, имели возможность для изменения значений в ходе крутого восхождения, различались в пределах ошибки установки и вычисления.

Выбранные значения нулевых уровней и шагов варьирования занести как константы в таблицу 1 (*Excel)*. (Столбцы 2–4 и 5–7).

Таблица 1

Матрица ПФЭ

№ опыта	x_{10}, Тл	x_{20}, м	x_{30}, А/мм^2	dx_1, Тл	dx_2, м	dx_3, А/мм^2	x_1~, о.е.	x_2~, о.е.	x_3~, о.е.	x_1, Тл	x_2, м	x_3, А/мм^2	y, кг
1							1	1	1				
2							-1	1	1				
3							1	-1	1				
4							-1	-1	1				
5							1	1	-1				
6							-1	1	-1				
7							1	-1	-1				
8							-1	-1	-1				

3. Пример построения матрицы ПФЭ для трех факторов в относительных единицах приведен в Таблице 1. Верхнему уровню соответствует значение (+1), нижнему – (-1). (Столбцы 8–10).

4. Абсолютные значения факторов рассчитываются по следующим выражениям:

$$x_{1i} = x_{10} + x_{1i}\sim \cdot dx_{1i};$$
$$x_{2i} = x_{20} + x_{2i}\sim \cdot dx_{2i}; \quad (1)$$
$$x_{3i} = x_{30} + x_{3i}\sim \cdot dx_{3i}.$$

где i – номер опыта (строки матрицы).

Значения x_{ji} , вычисленные по пункту 4 занести в столбцы 11-13 таблицы 1.

5. Значения параметра оптимизации y в столбце 14 таблицы 1 вычислять для каждой строки матрицы ПФЭ по соответствующим значениям факторов x_{ji} по формуле ММ, заданной преподавателем (из табл.3).

Вычисление коэффициентов регрессии и шагов крутого восхождения

Линейная модель поверхности отклика имеет вид уравнения

$$y\tilde{}=b_0+b_1(x_1-x_{10})/dx_1+b_2(x_2-x_{20})/dx_2+b_3(x_3-x_{30})/dx_3 \quad (2)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 – значения факторов из таблицы 4.

Значения коэффициентов вычисляются по результатам проведения полного факторного эксперимента (столбец 14 таблицы 1).

$$b_0 = (y_1 + y_2 + \cdots + y_8)/8;$$
$$b_1 = (y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8)/8;$$
$$b_2 = (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 - y_7 - y_8)/8; \quad (3)$$
$$b_3 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8)/8.$$

Знаки перед значениями y определяются соответствующими значениями кодированных факторов из столбцов 8–10 таблицы 1.

Значения коэффициентов линейной ММ занести в таблицу 2.

Таблица 2

Коэффициенты линейной ММ и шаги крутого восхождения.

b_0	b_1	b_2	b_3	m	$J_1=b_1*m$	$J_2=b_2*m$	$J_3=b_3*m$

Записать уравнение (2) с получившимися значениями коэффициентов. Оценить влияние каждого фактора на параметр оптимизации.

Выбрать, исходя из значения наиболее значимого коэффициента масштаб m шагов крутого восхождения $J_j = b_j * m$ и внести их значения в таблицу 2.

Крутое восхождение по поверхности уровня

Для расчета шагов крутого восхождения воспользуемся выражением (4)

$$x_{ji} = x_{j,i-1} - J_j, \quad (4)$$

где для первого шага $i = 1, i - 1 = 0$. (Движение по поверхности начинается с точки нулевого уровня x_{10}, x_{20}, x_{30}). Так как в данной задаче требуется отыскать минимум параметра оптимизации, то знак перед шагом приращения отрицательный, что соответствует движению по линии ската в направлении антиградиента.

Вычислить значение параметра оптимизации по линейной ММ ($\tilde{y}$) и по модели, заданной преподавателем (y).

Таблица 3

Уравнения математической модели по вариантам

№ варианта	Уравнение ММ
1	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}732)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 3{,}681)^2$
2	$y = 900 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}532)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1671)^2 + 200 \cdot (x_3 - 3{,}581)^2$
3	$y = 1000 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}332)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 4{,}681)^2$
4	$y = 1100 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}82)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}171)^2 + 200 \cdot (x_3 - 2{,}681)^2$
5	$y = 900 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}9)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}31)^2 + 200 \cdot (x_3 - 11{,}1)^2$
6	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}2)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 8{,}681)^2$
7	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}0)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}471)^2 + 200 \cdot (x_3 - 3{,}681)^2$
8	$y = 920 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}5)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}2571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 7{,}781)^2$
9	$y = 850 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}132)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 4{,}681)^2$
10	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 0{,}732)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1971)^2 + 200 \cdot (x_3 - 4{,}681)^2$
11	$y = 850 + 300 \cdot (x_1 - 0{,}732)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}3571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 10{,}681)^2$
12	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}932)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}3571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 7{,}681)^2$

Повторять вычисления до тех пор, пока крутое восхождение (спуск) будет эффективно. Занести результаты вычислений в табл. 4.

В таблицу внести значения y~, рассчитанные по линейной модели (2).

Таблица 4

Движение по линии наикратчайшего спуска.

№ шага	x_1	x_2	x_3	y~	y
0					
1					
2					
3					
4					
…					
n					
$n+1$					

Выписать минимальное значение параметра оптимизации y_{min} и соответствующие ему значения факторов.

Построить графики движения по поверхности отклика y и y~ в функции от № шага.

Принять обоснованное решение об эффективности процесса крутого спуска.

Сделать выводы по работе.

Подготовить отчет.

Практическое занятие № 3.

Тема: Построение матрицы ДФЭ и крутое восхождение по поверхности отклика

1. Цель занятия.

Освоение навыков построения матрицы дробного факторного эксперимента 2^{5-2} и проведения оптимизационного эксперимента методом Бокса-Уилсона на примере оптимизации трансформатора по массе при варьировании пяти факторов в ходе расчетного эксперимента.

2. Теоретическое описание.

Объект исследования – трехфазный трансформатор.

Параметр оптимизации – масса активных частей трансформатора.

Варьируемые факторы:

- индукция в стержне трансформатора, *Bc*, Тл; (фактор x_1);
- расчетный диаметр стержня, *Dc*, м; (фактор x_2);
- плотность тока в обмотке, *j*, А/мм^2; (фактор x_3);
- число витков обмотки низкого напряжения, *w*,(фактор x_4);
- высота обмотки, h_k ,(фактор x_5);

Известна следующая априорная информация об исследуемом трансформаторе, полученная из опыта проектирования аналогичных устройств.

Факторы имеют следующие диапазоны варьирования:

- индукция в стержне трансформатора, B_c = [0,2–2,2] Тл;
- расчетный диаметр стержня, D_c = [0,1–0,5] м;
- плотность тока в обмотке, j = [2–15] А/мм^2;
- число витков обмотки низкого напряжения, w=[20–100];
- высота обмотки, h_k =[100–700].

Лучший аналог имеет массу активных частей m = 1020 кг.

Задача исследования – найти значения варьируемых факторов, при которых достигается минимальное значение выходного параметра (массы активных частей трансформатора). Полученное значение массы должно быть не больше, чем у лучшего аналога.

Примечание: Уравнение математической модели (ММ) зависимости параметра оптимизации от варьируемых факторов задает преподаватель из таблицы 1.

Таблица 1

Уравнения математической модели по вариантам

№ варианта	Уравнение ММ
1	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}732)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 3{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 150)$
2	$y = 900 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}532)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1671)^2 + 200 \cdot (x_3 - 3{,}581)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 23) + ABS(x_5 - 141)$
3	$y = 1000 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}332)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 4{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 28) + ABS(x_5 - 150)$
4	$y = 1000 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}82)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}171)^2 + 200 \cdot (x_3 - 2{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 150)$
5	$y = 900 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}9)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}31)^2 + 200 \cdot (x_3 - 11{,}1)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 21) + ABS(x_5 - 120)$
6	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}2)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 8{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 150)$
7	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}0)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}471)^2 + 200 \cdot (x_3 - 3{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 150)$
8	$y = 920 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}5)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}2571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 7{,}781)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 150)$
9	$y = 850 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}132)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 4{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 150)$
10	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 0{,}732)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}1971)^2 + 200 \cdot (x_3 - 4{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 25) + ABS(x_5 - 135)$
11	$y = 850 + 300 \cdot (x_1 - 0{,}732)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}3571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 10{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 22) + ABS(x_5 - 165)$
12	$y = 950 + 300 \cdot (x_1 - 1{,}932)^2 + 3000 \cdot (x_2 - 0{,}3571)^2 + 200 \cdot (x_3 - 7{,}681)^2 + +10 \cdot ABS(x_4 - 35) + ABS(x_5 - 140)$

3. Проведение расчетного эксперимента
Построение матрицы ДФЭ.

Порядок построения матрицы ДФЭ.

1. Необходимо выбрать нулевой уровень значений варьируемых факторов (x_{10}, x_{20}, x_{30} ,x_{40}, x_{50}). Он выбирается по методике [2]. Как правило, за нулевой уровень фактора принимается значение, которое имеет лучший аналог. Если такая информация отсутствует, то обычно выбирается величина из середины диапазона допустимых значений данного фактора.
2. Выбор шагов варьирования факторов (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dx_5). Шаги варьирования выбираются таким образом, чтобы верхний и нижний уровень фактора не выходили за область определения, имели возможность для изменения значений в ходе крутого восхождения, различались в пределах ошибки установки и вычисления.

Выбранные значения нулевых уровней и шагов варьирования занести как константы в таблицу 2 (*Excel)*. (Столбцы 2–4 и 5–7).

Таблица 2 – Матрица ПФЭ

№	x_{10}, Тл	x_{20}, м	x_{30}, А/мм^2	x_{40}	x_{50}	dx_1, Тл	dx_2, м	dx_3, А/мм^2	dx_4	dx_5
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										

Продолжение Таблицы 1.

$x_{1\sim}$, о.е.	$x_{2\sim}$, о.е.	$x_{3\sim}$, о.е.	$x_{4\sim}$, о.е.	$x_{5\sim}$, о.е.	x_1, Тл	x_2, м	x_3, А/мм^2	x_4	x_5, мм	у, кг
1	1	1								
-1	1	1								
1	-1	1								
-1	-1	1								
1	1	-1								
-1	1	-1								
1	-1	-1								
-1	-1	-1								

3. Пример построения матрицы ДФЭ для пяти факторов в относительных единицах приведен в таблице 2. Верхнему уровню соответствует значение (+1), нижнему – (–1). (Столбцы 8–10). Для формирования столбцов матрицы x_4 и x_5 необходимо воспользоваться генерирующими соотношениями двойных и тройных взаимодействий факторов x_1,x_2 и x_3. Например, $x_4=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, а $x_5= x_2 \cdot x_3$.
4. Абсолютные значения факторов рассчитываются по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= x_{10} + x_{1i\sim} \cdot dx_{1i}; \\ x_{2i} &= x_{20} + x_{2i\sim} \cdot dx_{2i}; \\ x_{3i} &= x_{30} + x_{3i\sim} \cdot dx_{3i}. \\ x_{4i} &= x_{40} + x_{4i\sim} \cdot dx_{4i} \\ x_{5i} &= x_{50} + x_{5i\sim} \cdot dx_{5i} \end{aligned} \qquad (1)$$

где i – номер опыта (строки матрицы).

Значения $x_{ji\sim}$, вычисленные по пункту 4 занести в столбцы 13-18 таблицы 2.

5. Значения параметра оптимизации y таблицы 1 вычислять для каждой строки матрицы ДФЭ по соответствующим значениям факторов x_{ji} по формуле ММ, заданной преподавателем из табл.1.

Вычисление коэффициентов регрессии и шагов крутого восхождения

Линейная модель поверхности отклика имеет вид уравнения

$$y^{\sim}=b_0-b_1(x_1-x_{10})/dx_1+b_2(x_2-x_{20})/dx_2+b_3(x_3-x_{30})/dx_3+b_4(x_4-x_{40})/dx_4 + \\ +b_5*(x_5-x_{50})/dx_5-b_5 \qquad (2)$$

Значения коэффициентов вычисляются по результатам проведения дробного факторного эксперимента (столбец 14 таблицы 1).

$$\begin{aligned} b_0 &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_8)/8; \\ b_1 &= (y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8)/8; \\ b_2 &= (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 - y_7 - y_8)/8; \\ b_3 &= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8)/8. \end{aligned} \qquad (3)$$

и т.д.

Знаки перед значениями y определяются соответствующими значениями кодированных факторов из столбцов 8–12 таблицы 2.

Значения коэффициентов линейной ММ занести в таблицу 3.

Таблица 3- Коэффициенты линейной ММ и шаги крутого восхождения.

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	m	$J_1=b_1*m$	$J_2=b_2*m$	$J_3=b_3*m$	$J_4=b_4*m$	$J_5=b_5*m$

Записать уравнение (2) с получившимися значениями коэффициентов. Оценить влияние каждого фактора на параметр оптимизации. Выбрать, исходя из значения наиболее значимого коэффициента масштаб m шагов крутого восхождения $J_j=b_j * m$ и внести их значения в таблицу 2.

Крутое восхождение по поверхности уровня

Для расчета шагов крутого восхождения воспользуемся выражением (4)

$$x_{ji} = x_{j,i-1} - J_j, \qquad (4)$$

где для первого шага $i = 1, i - 1 = 0$. (Движение по поверхности начинается с точки нулевого уровня x_{10}, x_{20}, x_{30}). Так как в данной задаче требуется отыскать минимум параметра оптимизации, то знак перед шагом приращения отрицательный, что соответствует движению по линии ската в направлении антиградиента.

Вычислить значение параметра оптимизации по линейной ММ (y~) и по модели, заданной преподавателем (y).

Повторять вычисления до тех пор, пока крутой спуск будет эффективным. Занести результаты вычислений в таблицу 4.

В таблицу внести значения y~, рассчитанные по линейной модели (2).

Таблица 4 – Движение по линии наикратчайшего спуска.

№ шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
0						
1						
2						
…						

n						
n+1						

Построить графики крутого спуска $y = f(№_{шага})$, $\tilde{y} = f(№_{шага})$

Выписать минимальное значение параметра оптимизации и соответствующие ему значения факторов.

Принять обоснованное решение об эффективности процесса крутого восхождения (спуска).

Сделать выводы по работе.

Подготовить отчет.

Практическое занятие № 4.

Тема: Расчет коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов

1. Цель занятия.

Получение навыков обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

2. Теоретическое описание.

Было проведено испытание некоторого объекта, и получены экспериментальные результаты зависимости параметра *y* от фактора *x*. (Табл.1)

Была предложена гипотеза линейной зависимости *y* от *x*.

$$y = b_0 + b_1 \cdot y. \qquad (1)$$

Задача: По экспериментальным данным рассчитать значения коэффициентов b_0 *и* b_1.

В соответствие с теорией МНК коэффициенты рассчитываются по следующим формулам[2]

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}; \qquad (2)$$

$$b_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}. \qquad (3)$$

Суммы в формулах (2) и (3) удобно рассчитывать в электронных таблицах Excel.

Для этого необходимо заполнить в таблице 1 столбцы 3–10 с результатами обработки «экспериментальных данных». Значения y_i заполнить с помощью симуляционной формулы (4).

$$y_i = a + r \cdot x_i + RND \cdot c \qquad (4)$$

где *RND* – генератор случайных чисел (в Excel – **СЛЧИС ()**).

a, r и *c* – задаются преподавателем из табл.2.

Таблица 1.

Расчетная таблица для вычисления коэффициентов регрессии

№	x_i	Сл. число	y_i	x^2	xy	y^2	$x+y$	$(x+y)^2$	$y\sim$
1.	0								
2.	0,1								
3.	0,2								
4.	0,3								
5.	0,4								
6.	0,5								
7.	0,6								
8.	0,7								
9.	0,8								
10.	0,9								
11.	1,0								
12.	1,1								
13.	1,2								
Σ									

Таблица 2.

Значения коэффициентов *a*, *r* и *c* в симуляционной формуле

№ варианта / Параметр	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2	-3	0	1,5	-1	2,3	0,2	-0,5	4
r	1	2	-0,5	-1	4	2	1,2	-1,2	-2
c	1,5	1	2	0,8	2,5	3	1,5	1	1,5

3. **Обработка результатов эксперимента**

Задание

1. Рассчитать по приведенным формулам расчетные величины и занести их в таблицу 1.
2. Построить графики в одних координатных осях

$y_i = f(x_i)$;

$y_{i\sim} = b_0 + b_1 \cdot x_i$

Построить линию тренда.

3. Подготовить отчет о выполненной работе.

Вопросы для самопроверки

1) Практические задачи планирования эксперимента. Методология решения исследовательских задач.
2) Исторические концепции проведения научного эксперимента до XIX века. Новый подход к проведению научных исследований в XX веке.
3) Возможные технологии составления плана оптимизационного эксперимента. Пояснить на примере.
4) Планирование экстремального эксперимента. Кибернетическое понятие «Чёрный ящик». Функция цели, математические модели объекта оптимизационного эксперимента.
5) Параметры оптимизации. Их виды. Требования к параметрам оптимизации.
6) Задачи с несколькими параметрами оптимизации.
7) Факторы, варьируемые переменные. Требования к факторам и их совокупности.
8) Матрица планирования полного факторного эксперимента. Привести пример составления матрицы.
9) Пассивный и активный эксперимент. Требование ортогональности матрицы планирования.
10) Математические основы планирования эксперимента. Регрессионный анализ.
11) Полный факторный эксперимент (ПФЭ). Принципы составления планов ПФЭ. Составление матрицы плана эксперимента при кодовом представлении факторов.
12) ПФЭ для трёх переменных. Составление таблицы плана и расположение экспериментальных точек в факторном пространстве кодовых факторов.
13) Дробные планы или дробные реплики от полного факторного эксперимента (ДФЭ). Виды дробных планов: полуреплика, четвертьреплика, 1/8 – реплика, 1/16 – реплика.

14) Дробные планы 2^{k-1}, 2^{k-2} для k=5, k=6, и т.д. Достоинства и недостатки применения плана дробного факторного эксперимента.
15) Разрешающая способность дробных реплик в зависимости от выбора вида генерирующего соотношения.
16) Дрейфующие и неконтролируемые факторы эксперимента. Рандомизация опытов в плане эксперимента. Выполнение рандомизации опытов при исследовании технологических процессов.
17) Основные свойства планов ПФЭ и ДФЭ. Вычисление коэффициентов регрессии.
18) Вычисление коэффициентов неполного квадратного многочлена. Составление таблицы для вычисления коэффициентов регрессии.
19) Основные соотношения и правила перехода к естественным переменным.
20) Оценка адекватности математической модели.
21) Вычисление коэффициентов регрессии и статистические оценки.
22) Выбор масштаба шагов крутого восхождения.
23) Крутое восхождение по поверхности отклика.
24) Принятие решения по результатам крутого восхождения.
25) Оценка результатов оптимизационного эксперимента.
26) Примеры применения метода планирования эксперимента в задачах электроэнергетики и электротехники. Привести примеры физических (технологических) и численных (математических) задач исследования из предметной области.
27) Метод наименьших квадратов и его применение при обработке результатов эксперимента.

Заключение

Настоящее учебное пособие направлено на формирование компетенций в области планирования и проведения эксперимента и обработки экспериментальных данных в области электромеханики и электротехники. Большая часть пособия посвящена методам проведения натурного и расчетного экспериментов при поиске экстремальных условий. Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с методами оптимизации и статистической обработки результатов эксперимента.

Учебное пособие снабжено богатым иллюстрационным материалом на примерах оптимизации конкретных электротехнических объектов.

Практической направленности книги посвящен раздел 8, в котором приведены методические указания по проведению практических работ на симуляционных компьютерных моделях электротехнических объектов.

Для самопроверки обучающихся приведен список контрольных вопросов.

Учебное пособие будет полезным для бакалавров направления подготовки 13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника», и магистрантов направления подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника», а также аспирантам, преподавателям и научным работникам, занимающимся планированием экспериментальных исследований сложных, многофакторных электромеханических систем, объектов и явлений.

Библиографический список

1. Аветисян Д.А. Оптимальное проектирование электрических машин на ЭВМ /Д. А. Аветисян, В. С. Соколов, В. Х. Хан – М.: Энергия, 1976. – 208с.
2. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий /Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М.: Наука, 1976.
3. Аоки М. Введение в методы оптимизации: пер. с англ /М. Аоки – М: Наука, 2010 / под ред. Б.Т. Поляка.
4. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента: Учеб. Пособие для вузов /В. И. Асатурян – М.: Радио и связь, 1983. – 248с.
5. Бахарев Н.П. Планирование эксперимента: учеб. пособие / Н.П. Бахарев. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2013. – 77 с.
6. Балагуров В. А. Бесконтактные двигатели постоянного тока с постоянными магнитами /В.А. Балагуров, В. М. Гридин, В. К. Лезенко – М.: Энергия, 1975.
7. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления /В. Г. Болтянский – М.: Наука, 2012.
8. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента /В. З. Бродский – М.: Наука, 1976.
9. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине /Н. Винер.1948-1961.- 2-е издание. - М.: Наука; Главная редакция изданий для зарубежных стран, 1983. - 344 с.
10. Гуд Х. Системотехника. Введение в проектирование больших систем/Х. Гуд, Р. Э. Макол – М.: «Советское радио», 1962.
11. Добкин В. М. Выбор экономических критериев оптимизации режимных и конструктивных параметров реакторов /В. М. Добкин – Химическая промышленность, 1968, №3.
12. Ивоботенко Б.А. Планирование эксперимента в электромеханике /Б. А. Ивоботенко, Н. Ф. Ильинский, И. П. Копылов – М.: Энергия, 1975.

13. Кононюк А.Е. Основы научных исследований (общая теория эксперимента) книга 1. Монография /А. Е. Кононюк – Киев.: 2010.- 508 с.
14. Кононюк А.Е. Основы научных исследований (общая теория эксперимента) книга 2. Монография/А. Е. Кононюк – Киев.: 2010.- 452 с.
15. Корн Г. Справочник по математике /Г. Корн, Т. Корн – М: Наука, 1973.
16. Налимов В.В. Теория эксперимента /В. В. Налимов – М: Наука, 1971.
17. Овсянников В. Н. Моментный двигатель с ограниченным углом поворота ротора: дис. канд. техн. наук: 05.09.01 /В. Н. Овсянников; Самарский государственный технический университет. – Самара, 2014. – 180 с.
18. Радченко С.Г. Устойчивые методы оценивания статистических моделей: Монография /С. Г. Радченко – Киев: ПП Санспарель, 2010. - 504 с.
19. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями /И. М. Соболь, Р. Б. Стадишев – М.: Наука, 2010. – 108с.
20. Столов Л. И. Моментные двигатели постоянного тока /Л. И. Столов, А. Ю. Афанасьев – М.: Энергоатомиздат, 1989 – 224 с.
21. Уайлд Д.Дж. Методы поиска экстремума: Пер. с англ /Д. Дж. Уайлд – М.: Наука, 1967 / Под ред. А.А. Фельбаума.
22. Фон Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение /Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн – М.: «Наука», 1972.
23. Цирулик А.Я. Планирование эксперимента в электромашиностроении /А. Я. Цирулик – Учебное пособие. – Куйбышев: КуАИ, 1983, 43с.
24. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений /И. Г. Черноруцкий – С.Пб.: БХВ – Петербург, 2005. – 416 с.

25. Эшби У.Р. Введение в кибернетику /У. Р. Эшби – М.: Издательство иностранной литературы, под редакцией В. А. Успенского, 1959. – 432 с.
26. Box G. Problems in the analysis of growth /G. Box – N-Y, - 1936, p.376.
27. Fisher R. A. The Design of Experiment /R. A. Fisher// 6-th ed., London, Oliver and Boyd, 1951.
28. Harrington E. C. Chem. Engng. Progr. 1963, 42, N 59.
29. Harrington E. C. Industr. Quality Control, 1965, 21, N 10.

Учебное издание

МАКАРИЧЕВ Юрий Александрович
ИВАННИКОВ Юрий Николаевич

Методы планирования эксперимента и обработки данных

Редактор
Компьютерная верстка
Выпускающий редактор

Подп. в печать
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная
Усл. п.л. . Уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Рег. №
Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8