

**А.М. АБАКУМОВ, Ю.А. МАКАРИЧЕВ, В.Е. АНТРОПОВ**

**МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ  
В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ**

**Учебное пособие**

**Самара**

**Самарский государственный технический университет**

**2023**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электромеханика и автомобильное электрооборудование»

А.М. АБАКУМОВ, Ю.А. МАКАРИЧЕВ, В.Е. АНТРОПОВ

# МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

*Учебное пособие*

Самара

Самарский государственный технический университет

2023

Печатается по решению методического совета электротехнического факультета СамГТУ (протокол № 1 от 04.09.2023 г.).

УДК 621.31(075.8)

ББК 31.2я73

А 13

**Абакумов А.М.**

**Методы принятия решений в прикладных задачах:** учебное пособие / *А.М. Абакумов, Ю.А. Макаричев, В.Е. Антропов.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2023. – 94 с.

Рассмотрены некоторые методы принятия решений, широко используемые в прикладных технических задачах. Приведены классический метод нахождения экстремума функции и методы поиска экстремума функции одной и нескольких переменных, описаны алгоритмы решения некоторых задач многокритериальной оптимизации, рассмотрены постановка и графический метод решения задачи линейного программирования.

Составлено в соответствии с рабочими программами дисциплин, изучаемых студентами электротехнического факультета, обучающимися по направлению 13.03.02 профиля подготовки бакалавров «Электромеханика» и подготовки магистров программы 13.04.02 «Современные технологии в электромеханике и автоматизированном электроприводе».

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор *А.В. Стариков*,  
канд. техн. наук, доцент *В.Н. Овсянников*

УДК 621.31(075.8)

ББК 31.2я73

А 13

© А.М. Абакумов, Ю.А. Макаричев,  
В.Е. Антропов, 2023

© Самарский государственный  
технический университет, 2023

## ПРЕДИСЛОВИЕ

На этапе создания электротехнических систем и комплексов перед проектировщиками возникают проблемы выбора параметров изделия и способов реализации мероприятий, обеспечивающих заданные характеристики электрооборудования. Среди показателей качества проектируемых объектов могут фигурировать массогабаритные, стоимостные характеристики, показатели надежности и энергопотребления и т. д.

Появление в последние десятилетия в электротехнической промышленности новых магнитных, изоляционных и конструкционных материалов приводит к изменениям характеристик, методик проектирования и режимов эксплуатации электроустановок. В то же время новые материалы, обладая лучшими по сравнению с традиционными характеристиками, имеют более высокую стоимость, что приводит к необходимости оценки целесообразности их использования. В этих условиях возникают задачи выбора наилучшего (оптимального) в некотором смысле варианта проектного решения из множества допустимых вариантов.

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены вопросы постановки различных оптимизационных задач и методы их решения.

Учебное пособие составлено в соответствии с рабочими программами дисциплин Б1.В.04.01 «Проектирование электрических машин», Б1.В.02.02 «Практико-ориентированный проект», изучаемых студентами электротехнического факультета, обучающимися по направлению 13.03.02 профиля подготовки бакалавров «Электромеханика», и рабочими программами подготовки магистров профиля 13.04.02 «Современные технологии в электромеханике и автоматизированном электроприводе», изучающих дисциплины Б1.В.01.06 «Компьютерные исследования электромеханических преобразователей», Б1.В.02.01 «Мастерская инноваций (проектная мастерская)», Б1.В.01.01 «Методы принятия технических решений в задачах проектирования и управления», Б1.В.ДВ.03.01 «Модели и методы расчетов

электромеханических систем», Б1.В.01.03 «Оптимальное проектирование в электромеханике и электроприводе», Б1.В.ДВ.02.01 «Оптимизация режимов работы электромеханических преобразователей».

Учебное пособие может быть также полезно при выполнении курсовых проектов и выпускной квалификационной работы.

Для успешного освоения материала в каждом разделе учебного пособия наряду с теоретической частью приведены контрольные вопросы и задания для практических занятий и самостоятельной работы.

## ВВЕДЕНИЕ

С задачами принятия решений мы постоянно сталкиваемся в повседневной жизни. Вспомните, например, какие решения вы принимали сегодня утром: что надеть, отправляясь во внешний мир; каким транспортом воспользоваться и т. д. и т. п. Как правило, эти решения принимаются на некотором интуитивном уровне, без особого анализа. Задачи принятия решений в области науки и техники носят значительно более сложный характер.

В процессе проведения научных исследований и проектных работ инженеру приходится постоянно принимать решения, генерировать идеи, оценивать и выбирать лучший вариант из множества возможных. Специалисты в самых различных областях науки и техники, занимающиеся разработкой всевозможных устройств и приспособлений, проектированием тех или иных сооружений, конструированием новых моделей и типов электромеханических преобразователей, систем электропривода, автомобилей, самолетов и т. п. также всякий раз стремятся выбрать оптимальное инженерное, конструкторское или проектное решение. Оптимальность связывается с осуществлением наилучшего выбора (достижением желаемой цели) при ограниченных возможностях. Развитию и внедрению понятия оптимальности в экономике и в технике немало способствовало появление таких разделов математики, как линейное, нелинейное и динамическое программирование.

С 1969 года стала вручаться Нобелевская премия в области экономики. Среди нобелевских лауреатов имеется немало профессиональных математиков и экономистов. В этой связи следует напомнить имя нашего соотечественника, математика Л.В. Канторовича, который стоял у истоков зарождения линейного программирования и его широкого применения в плановой экономике. Он стал нобелевским лауреатом совместно с американским экономистом Т. Купмансом в 1975 году.

В том же двадцатом веке в практике экономического анализа стали использовать теорию принятия решений. В указанных направлениях были достигнуты значительные успехи.

В технике, экономике, других сферах человеческой деятельности *под задачей принятия решений* обычно понимают задачу выбора *оптимального* (лат. *optimus* – наилучший, наиболее благоприятный, предпочтительный) в некотором смысле способа действия или варианта решения из некоторого множества допустимых вариантов.

В любой прикладной оптимизационной задаче можно выделить несколько ответственных этапов. Первоначальными, наиболее важными этапами являются содержательная постановка задачи и разработка математической модели, позволяющей оценить качество выбора (результата) того или иного решения.

Задачи принятия решений имеют самый разнообразный характер, и их словесные формулировки существенно различаются. Однако во многих случаях такие задачи, возникающие в различных областях человеческой деятельности, при использовании языка математики могут быть отнесены к определенному классу задач и решены с использованием стандартных методов принятия решений.

Предметом изучения дисциплины «Методы принятия технических решений» является совокупность математических методов, связанных с выбором оптимального в некотором смысле решения.

Предлагаемое учебное пособие ориентировано на студентов технических направлений подготовки и предназначено для ознакомления с основными понятиями и терминами теории принятия решений, некоторыми математическими методами выбора оптимального решения.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим простые задачи принятия решений и отметим их *характерные особенности*.

Задача принятия решения возникает, когда есть несколько (в общем случае – бесконечное множество) *альтернативных вариантов* ее решения и требуется выбрать наилучший в определенном смысле вариант.

*Критерий оптимизации.* Задачи принятия решений в технике напрямую связаны с понятием «*оптимизация*», которое предполагает выбор некоторого *оптимального решения*.

Каждый вариант решения можно характеризовать некоторым показателем качества. Этот показатель в разных задачах называют *критерием оптимизации, целевой функцией, функцией цели*. Критерий оптимизации должен иметь количественную оценку. Обозначим его  $y$ . Вариант решения, при котором достигается максимум (или минимум в зависимости от смысла задачи) критерия оптимизации, называют *оптимальным*.

Поясним сказанное примерами. Предположим, проектируется асинхронный электродвигатель (АД). Важнейшими энергетическими показателями АД являются КПД и коэффициент мощности. Естественно принять за критерий оптимизации один или оба эти показателя и стремиться при проектировании добиться их *максимальных значений*.

В задаче проектирования системы электроснабжения в качестве критериев оптимизации могут рассматриваться, например, суммарные потери в элементах системы или стоимость проводниковых материалов. Эти критерии нужно *минимизировать*.

Другой пример: предположим, решается задача синтеза регуляторов системы автоматического управления некоторым объектом. В качестве критериев оптимизации здесь могут рассматриваться показатели качества регулирования: время переходного процесса, величина перерегулирования.

Если критерий оптимизации единственный, то задача называется *однокритериальной*, если несколько – *многокритериальной*.

**Параметры проектирования.** Добиваться наилучшего значения критерия (критериев) оптимизации в задаче проектирования можно за счет целенаправленного изменения одного или нескольких конструктивных параметров. Их называют *параметрами проектирования*. Будем обозначать параметры проектирования  $x_j$ .

Например, при проектировании электродвигателя можно изменять диаметр провода обмотки, размеры паза и т. д.; в проектах систем электроснабжения можно рассматривать различные варианты расположения трансформаторов и их мощности и т. д.; в проектах электропривода можно использовать различные типы электродвигателей и кинематической схемы и т. д.

Если параметр проектирования единственный, то задачу называют *однопараметрической (одномерной)*, если параметров проектирования несколько – *многопараметрической (многомерной)*.

На интервал изменения параметров проектирования, как правило, наложены *ограничения*. Так, если параметр проектирования  $x$  единственный, то ограничения могут иметь вид

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

Например, диаметр провода при проектировании можно изменять от некоторого минимального до некоторого максимального значения.

В случае нескольких параметров проектирования ограничения формулируются в следующем виде: значения параметров проектирования должны принадлежать области  $D$  допустимых значений параметров.

**Математическая модель.** Для постановки и аналитического решения задачи оптимизации должна быть разработана математическая модель. Математическая модель представляет собой математическую зависимость критерия оптимизации от параметров проектирования исследуемого объекта (системы). Использование математической модели позволяет, в частности, без проведения экспериментов

найти значения критерия оптимизации для различных значений параметров проектирования.

Для однокритериальной задачи оптимизации математическая модель может быть представлена в виде

$$y = f(x_i), x_{imin} \leq x_i \leq x_{imax},$$

где  $i$  – количество параметров проектирования.

Для однокритериальной одномерной задачи математическая модель устанавливает функциональную зависимость критерия оптимизации от одного проектного параметра  $y(x)$ .

**Постановка задачи оптимизации.** Задачу оптимизации с одним параметром проектирования можно математически сформулировать в виде

$$y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = \max y(x), \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (1.1)$$

или

$$y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = \min y(x), \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}. \quad (1.2)$$

Эта запись читается так. Необходимо в условиях ограничений на параметр проектирования найти его оптимальное значение  $x_{\text{опт}}$ , доставляющее экстремум (максимум или минимум) критерию оптимизации. Для корректной постановки задачи необходимо обязательно указывать критерий оптимизации, так как оптимальное решение по определенному критерию далеко не всегда оптимально по другому критерию.

При такой постановке далее, используя известные из математики методы определения экстремума функции, ищут оптимальное решение.

Другой класс задач оптимизации – это **задачи линейного программирования**. В таких задачах целевая функция и ограничения задаются линейными функциями.

Постановка задачи оптимизации **управления** некоторым техническим объектом в стационарных (установившихся) режимах аналогична сформулированной для задачи проектирования. Только вместо параметров проектирования рассматриваются **управляющие воздействия** на объект управления (систему).

В рассмотренной постановке задачи оптимизации предполагается, что математическая модель описывается алгебраическими уравнениями. Такие задачи называют *задачами статической оптимизации*.

Существует и другой класс задач – *задачи динамической оптимизации*.

Математические модели в таких задачах описываются дифференциальными уравнениями, устанавливающими взаимосвязь между переменными системы, являющимися, как правило, функциями времени, а критерий оптимальности является интегральным функционалом.

Таким образом, методы решения задач статической оптимизации относятся к разделу поиска экстремума *функций* (экстремальные задачи), а методы решения задач динамической оптимизации относятся к разделу поиска экстремума *функционалов*.

Целью решения задачи динамической оптимизации является отыскание *оптимального алгоритма управления* – алгоритма (закона) изменения управляющего воздействия (воздействий), обеспечивающего экстремум критерия оптимизации.

Например, может ставиться задача отыскания оптимального алгоритма изменения напряжения на якоре двигателя постоянного тока (управляющее воздействие), обеспечивающего минимальное время разгона двигателя (критерий оптимизации). Здесь ограничения накладываются на величину напряжения и тока двигателя.

Различают задачи *непрерывной оптимизации* и *дискретной*. В случае, когда параметр (параметры) оптимизации или управляющие воздействия могут принимать в области определения бесконечное множество значений, говорят о задаче непрерывной оптимизации.

В некоторых случаях параметры проектирования могут принимать только дискретные значения. Например, существуют стандартные значения диаметра проводников, стандартные значения мощности типовых трансформаторов и т. п. В этом случае рассматривается задача дискретной оптимизации. Результатом ее решения является конечное множество вариантов допустимых решений, из которых нужно выбрать оптимальное.

В рассмотренных выше примерах предполагается, что критерий оптимизации единственный – это однокритериальные задачи.

Во многих случаях приходится рассматривать несколько критериев оптимизации. Например, выбор варианта поездки из дома в университет. Можно рассматривать в качестве критериев два показателя: время поездки и стоимость. Это уже многокритериальная задача, и для ее решения используются специальные методы.

Отметим основные *этапы решения задач оптимизации*.

1. Содержательная постановка задачи: обоснованный выбор критерия оптимизации; анализ возможных параметров проектирования (управления) и ограничений.

2. Разработка математической модели исследуемого объекта (системы).

3. Отыскание оптимального решения с использованием известных математических методов.

4. Анализ эффективности оптимизации (сравнение результатов оптимального решения с другими возможными вариантами).

Приведенные сведения не являются исчерпывающими. Более полные сведения о постановках и методах принятия решений можно получить в литературе [2, 4, 8–12].

### **Контрольные вопросы**

1. Что понимают под параметрами проектирования?
2. Что понимают под критерием оптимизации?
3. Приведите формулировку задачи статической оптимизации.

## 2. НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

### Краткие теоретические сведения

В некоторых случаях при решении задачи оптимизации критерий оптимизации  $y$  может быть представлен в виде нелинейной функции (рис. 2.1) одной переменной  $x$ :  $y(x)$ . Тогда задача определения оптимального решения  $y_{\text{опт}} = y(x_{\text{опт}})$  сводится к нахождению максимума или минимума (экстремума) функции  $y(x)$ . Напомним некоторые сведения из математики, касающиеся экстремумов.

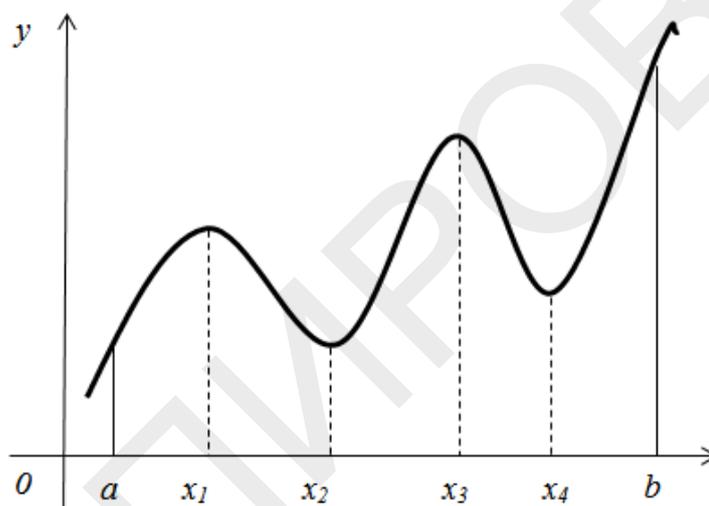


Рис. 2.1. График функции  $y(x)$

Пусть функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$  и точка  $x_{\text{опт}}$  принадлежит этому интервалу. Значение  $f(x_i)$  называется локальным минимумом функции на  $[a, b]$ , если в малой окрестности  $\pm\varepsilon$  точки  $x_i$  выполняется неравенства

$$y(x_i) < y(x_i \mp \varepsilon).$$

Локальному максимуму соответствует выполнение условий:

$$y(x_i) > y(x_i \mp \varepsilon).$$

Иными словами, экстремумы функции  $f$  являются наименьшими или наибольшими значениями функции относительно некоторой ок-

рестности точки  $x_i$ . Функция, график которой приведен на рис. 2.1, имеет локальные минимумы в точках  $x_2$  и  $x_4$  и локальные максимумы в точках  $x_1$  и  $x_3$ . Причем в точке  $x_1$  достигается глобальный минимум, а в точке  $x_3$  – глобальный максимум.

Наибольшего (наименьшего) значения функция  $y$ , дифференцируемая на  $[a, b]$ , достигает или в точке локального максимума (минимума), или на одном из концов отрезка  $[a, b]$ . Таким образом, если известны все локальные максимумы (минимумы) функции на отрезке  $[a, b]$  и значения функции в точках  $a$  и  $b$ , то перебором легко определить максимальное (минимальное) значение функции на  $[a, b]$ .

С математической точки зрения не имеет существенного значения, какая задача рассматривается – максимизации или минимизации, поскольку максимизация функции  $y(x)$  эквивалентна минимизации  $-y(x)$ .

Для нахождения точек экстремума не имеющей точек перегиба функции  $y(x)$ , как известно из математики, может использовать следующий алгоритм:

- находят первую производную функции  $y'(x)$ ;
- определяют критические точки функции, для этого решают уравнение  $y'(x) = 0$  и находят его корни;
- определяют знак второй производной  $y''(x)$  в точке экстремума; если  $y''(x) > 0$  то точка экстремума – минимум, если  $y''(x) < 0$  – максимум;
- находят значение функции в точках экстремума.

Для иллюстрации строят график функции и её производной.

### Контрольные вопросы

1. Что такое минимум, максимум, экстремум функции?
2. Дайте определение точки минимума и максимума функции.
3. Укажите алгоритм поиска точек экстремума функции  $y(x)$  при использовании классического метода.
4. Назовите плюсы и минусы использования классического метода.

### Задание № 2.1 и пример расчетов

Задана функция одной переменной  $y(x)$ . Используя классический метод, определите точку (точки), в которой функция достигает экс-

тремума. С учетом ограничений найдите значения функции в точке экстремума  $y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}})$ .

Варианты заданий приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ варианта	$y(x)$	Область определения функции
1	$-x^3+12x+2$	$[0, 3]$
2	$-0,5x^3+12x-5$	$[0, 5]$
3	$16x^2-40x+9$	$[-2, 4]$
4	$(60-2x)^2x$	$[8, 12]$
5	$x^3-12x$	$[0, 5]$
6	$x^3-3x^2-9x+5$	$[0, 5]$
7	$0,5x^3-10x^2-9x+10$	$[-2, 1]$
8	$x(x-1)^2$	$[0, 1]$
9	$x^3-2x^2+x+1$	$[0, 1]$
10	$x^3-2x^2+x+1$	$[0,6, 1,5]$

Постройте график функции, а также график ее первой производной. По графикам определите точку  $x_{\text{опт}}$ , в которой функция достигает экстремума, найдите значение функции в точке экстремума  $y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}})$ , а также значения ее первой производной в точке  $x_{\text{опт}}$ .

Сравните результаты аналитического исследования и анализа графиков.

**Пример 2.1.** Задана функция  $x^3-2x^2+x+1$ ,  $0,6 < x < 1,5$ .

### *Аналитическое исследование*

Находим первую производную функции  $y'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ .

Решаем квадратное уравнение  $y'(x) = 0$  и находим его корни:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1/3$ . Значение  $x_2$  лежит вне области ограничений. С учетом ограничений принимаем  $x_{\text{опт}} = x_1 = 1$ .

Определяем знак второй производной  $y''(x)$  в точке экстремума:  $y'' = 6x_{\text{опт}} - 4 = 6 - 4 > 0$ . Следовательно точка экстремума – минимум.

Находим значение функции в точке минимума:

$$y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = x_{\text{опт}}^3 - 2x_{\text{опт}}^2 + x_{\text{опт}} + 1 = 1.$$

С использованием таблиц XL проводим расчеты (табл. 2.2) и строим графики функции и ее производной – рис. 2.2.

Таблица 2.2

$x$	$y$	$y'$
0,6	1,096	-0,32
0,7	1,063	-0,33
0,8	1,032	-0,28
0,9	1,009	-0,17
1	1	0
1,1	1,011	0,23
1,2	1,048	0,52
1,3	1,117	0,87
1,4	1,224	1,28
1,5	1,375	1,75

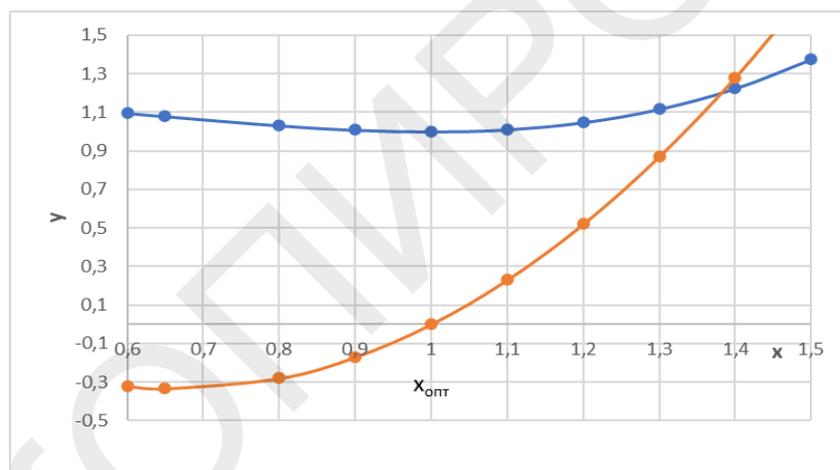


Рис. 2.2. Графики функции и ее производной

### Выводы

Как следует из графиков и расчетной таблицы, оптимальное (минимальное) значение функции достигается при  $x_{\text{опт}} = 1$  и равно  $y_{\text{опт}} = 1$ , а производная функции  $y'(x)$  при  $x_{\text{опт}} = 1$  равна 0. Полученные результаты совпадают с результатами аналитического исследования.

### Содержание отчета

1. Постановка задачи и исходные данные для расчета.
2. Аналитическое исследование функции на экстремум.

3. Графики функции и ее производной.
4. Результаты анализа графиков.
5. Сравнение результатов, полученных при аналитическом решении задачи, с результатами, полученными по графикам.

### Задание № 2.2 и пример расчетов

Рассматривается установка (вибростенд) для создания гармонических воздействий на исследуемый объект при проведении виброиспытаний.

Упрощенная расчетная схема установки приведена на рис. 2.3, где обозначено:

$m$  – масса испытуемого объекта,  $C$  – жесткость упругого элемента;  $\beta$  – коэффициент сопротивления демпфирующего элемента.

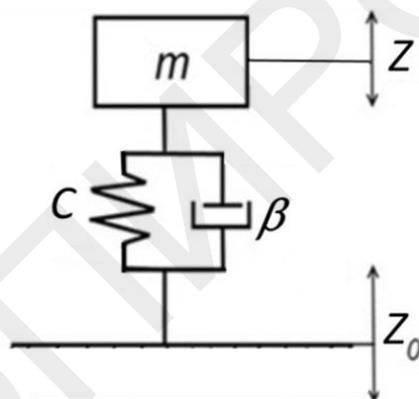


Рис. 2.3. Расчетная схема одномассовой колебательной системы

Перемещение  $Z_0$  создается с помощью электродвигателя и кривошипно-шатунного механизма по гармоническому закону с определенной амплитудой  $A_0$ . В результате, перемещение  $Z$  испытуемого объекта так же происходит по гармоническому закону некоторой амплитудой  $A(\omega)$ , зависящей от частоты  $\omega$ .

**Требуется найти** частоту  $\omega_{\text{опт}}$ , при которой амплитуда колебаний испытуемого  $A(\omega)$  объекта будет максимальной.

Из условий задачи следует, что за **критерий оптимальности** следует принять амплитуду колебаний  $A(\omega)$ , а за **параметр проектирования** – частоту  $\omega$  входного воздействия.

Тогда математическую формулировку задачи можно представить в следующем виде: найти оптимальное значение частоты  $\omega_{\text{опт}}$  входного воздействия, доставляющее максимум критерию оптимизации:

$$A_{\text{опт}}(\omega_{\text{опт}}) = \max A(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \omega_{\text{max}}.$$

Далее необходимо разработать *математическую модель*, устанавливающую зависимость критерия оптимизации от параметра проектирования.

При гармоническом входном воздействии зависимость относительной амплитуда выходной величины от частоты определяется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы. В свою очередь АЧХ определяется передаточной функцией системы.

Несложно показать, что взаимосвязь выходной и входной переменных рассматриваемой расчетной схемы можно приближенно представить передаточной функцией колебательного звена:

$$W(p) = \frac{z(p)}{z_0(p)} = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad 0 < \xi < 1,$$

где постоянная времени  $T$  и коэффициент демпфирования  $\xi$  определяются выражениями

$$T = \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad \xi = \frac{\beta}{2T}.$$

Выражение для амплитудно-частотной характеристики колебательного звена имеет вид

$$A(\omega) = \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}}. \quad (2.1)$$

Таким образом, задача свелась к тому, что необходимо исследовать на максимум последнее выражение.

Очевидно, что максимум АЧХ достигается при минимальном значении подкоренного выражения знаменателя:

$$Z(\omega) = (1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2.$$

Следовательно, для решения задачи в соответствии с классическим методом определения экстремума необходимо взять производную  $Z'(\omega)$  от последнего выражения, приравнять ее нулю и получить выражение для  $\omega_{\text{опт}}$ .

Максимальное (оптимальное) значение АЧХ рассчитывается подстановкой значения  $\omega_{\text{опт}}$  в формулу (2.1).

Для иллюстрации и подтверждения правильности вычислений необходимо выполнить расчеты и построить график АЧХ и производной  $Z'(\omega)$  для заданных преподавателем значений параметров передаточной функции.

Пример таких расчетов для  $T = 1$  с,  $\xi = 0,4$  приведен в табл. 2.3 (в таблице выделены рассчитанные значения  $\omega_{\text{опт}}$  и  $A_{\text{опт}}$ ), графики показаны на рис. 2.4.

Таблица 2.3

$\omega$ , рад/с	$A(\omega)$	$Z'(\omega)$
0	1,000	-0,68
0,1	1,007	-0,67
0,2	1,027	-0,64
0,3	1,063	-0,59
0,4	1,112	-0,52
0,5	1,176	-0,43
0,6	1,250	-0,32
0,7	1,320	-0,19
0,8	1,362	-0,04
<b>0,824</b>	<b>1,364</b>	<b>0,00102</b>
0,9	1,343	0,13
1	1,250	0,32
1,1	1,105	0,53
1,2	0,947	0,76
1,3	0,801	1,01
1,4	0,678	1,28
1,5	0,577	1,57
1,6	0,496	1,88
1,7	0,429	2,21
1,8	0,376	2,56
1,9	0,331	2,93
2	0,294	3,32

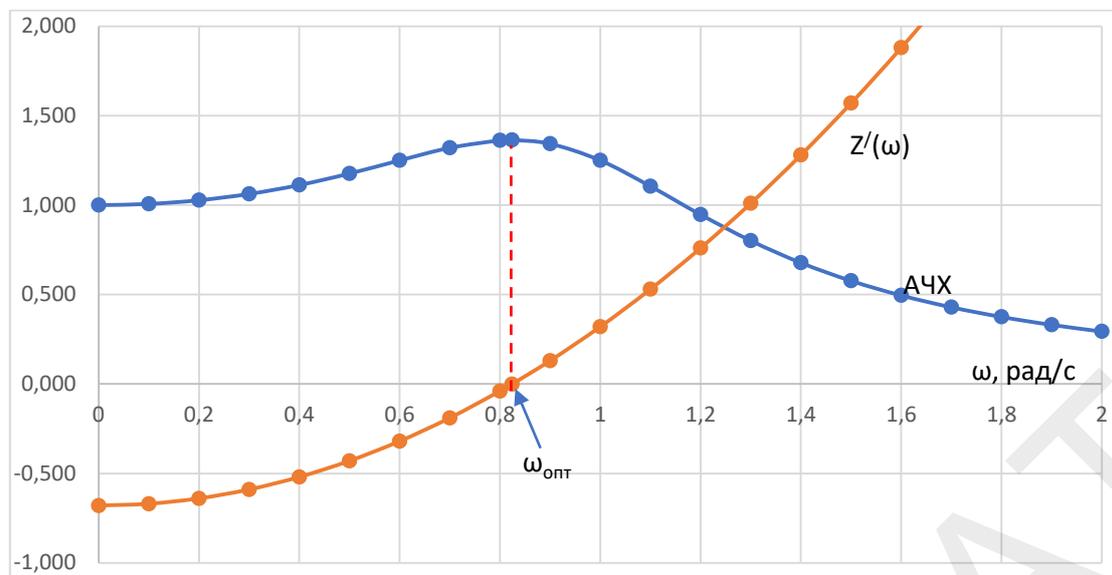


Рис. 2.4. К определению максимума АЧХ

### Содержание отчета

1. Постановка задачи и исходные данные для расчетов.
2. Аналитическое исследование функции на экстремум.
3. Графики функции и ее производной. Результаты анализа графиков.
4. Сравнение результатов, полученных при аналитическом решении задачи, с результатами, полученными по графикам.

### 3. ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МЕТОДОМ СКАНИРОВАНИЯ

#### Краткие теоретические сведения

Классический метод определения экстремума функции для нахождения оптимального решения удается использовать далеко не всегда.

Во-первых, функция  $y = f(x)$  может быть недифференцируема или невозможно аналитически определить корни выражения для производной функции.

Во-вторых, в технических задачах не всегда удается получить аналитическое выражение, устанавливающее зависимость критерия оптимизации от параметра проектирования.

В таких ситуациях используют различные *методы поиска оптимального решения*.

Одним из таких методов является *метод перебора* или, иначе, *метод сканирования*.

Как и в классическом методе, рассматриваем одномерную задачу оптимизации, когда показатель качества (критерий оптимизации) является функцией одной переменной

$$y = f(x), a \leq x \leq b,$$

где  $a$  и  $b$  – соответственно минимальное и максимальное значение переменной  $x$ .

*Задача оптимизации* заключается в отыскании оптимального значения  $x_{\text{опт}}$ , при котором достигается экстремум (минимум или максимум) критерия оптимизации:

$$y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = \text{extr } y(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Метод сканирования (перебора) является достаточно универсальным и используется прежде всего в тех случаях, когда информация о виде исследуемой функции ограничена. В частности, неизвестно, является функция одно- или многоэкстремальной.

Метод заключается *в последовательном переборе* всех значений  $x_i$  с шагом  $h$  на заданном интервале  $(a, b)$  с вычислением критерия оптимальности  $y_i$  в каждой точке (рис. 3.1). Далее выбирается наименьшее (или наибольшее) значение  $y_i$  и полученное решение принимается за оптимальное  $y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}})$ .

При использовании различных методов поиска возникает вопрос о *погрешности* определения оптимальных значений параметра проектирования  $x_{\text{опт}}$  и (или) значения критерия оптимизации  $y_{\text{опт}}$ . Проблема связана с тем, что точные значения  $x_{\text{опт}}$  и  $y_{\text{опт}}$  неизвестны. В частности, при использовании метода сканирования для точного определения оптимального решения необходимо провести вычисления в бесконечном множестве точек (принять  $h \rightarrow 0$ ).

Возможные ситуации в случае конечного числа расчетных точек и, соответственно, конечного шага вычислений показаны на рис. 3.1. По результатам расчета минимальное значение критерия оптимальности будет получено в точке  $C$ , и за оптимальное значение параметра проектирования будет принято  $x_{\text{опт}}$ , показанное на рис. 3.1. Фактическое же значение минимума может лежать как правее (кривая 1), так и левее (кривая 2) этой точки. Таким образом, фактическое значение оптимума может находиться внутри или на границе отрезка  $2h$ . Учитывая это, считают, что наибольшая возможная погрешность вычисления параметра проектирования составляет  $2h$ .

Значение шага вычислений связано с числом вычислений  $n$  (числом расчетных точек) соотношением

$$h = \frac{b - a}{n - 1} = \frac{L}{n - 1}, \quad (3.1)$$

где  $L = (b - a)$  называют исходным отрезком неопределенности.

Это диапазон возможного изменения параметра проектирования, на котором ищется оптимальное решение.

Используя эту терминологию, говорят, что в результате решения задачи поиска методом сканирования исходный отрезок неопределенности  $L$ , на котором может находиться экстремум функции, уменьшается до значения  $2h$ .

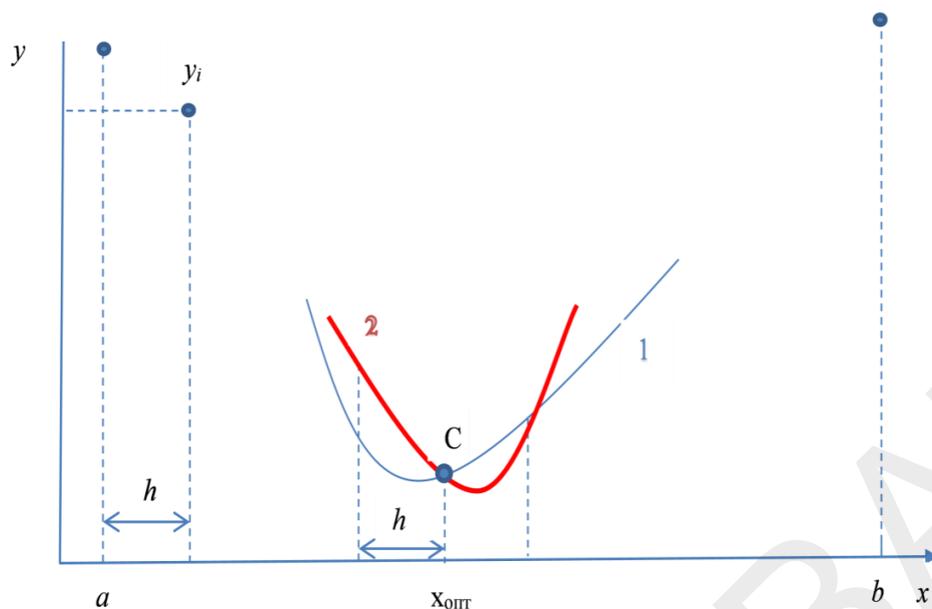


Рис. 3.1. Поиск оптимального решения методом сканирования

Чтобы сравнивать эффективность поиска различными методами, нужно использовать какой-либо **показатель эффективности**.

Например, за показатель эффективности можно принять отношение исходного отрезка неопределенности к остающемуся после  $n$  вычислений.

Для метода сканирования этот показатель будет иметь выражение

$$ef = \frac{L}{2h}.$$

С учетом выражения (3.1) последнее соотношение можно представить в виде

$$ef = \frac{L}{2h} = \frac{n-1}{2} \approx \frac{n}{2}. \quad (3.2)$$

Откуда следует, что, например, при  $n = 20$  исходный отрезок неопределенности уменьшается в 10 раз.

**Достоинство метода:** он позволяет найти глобальный экстремум, даже если функция многоэкстремальная. **Недостаток** – значительное число повторных вычислений, что при сложной функции  $y = f(x)$  увеличивает затраты на поиск.

В некоторых технических задачах, когда аналитическое выражение  $y = f(x)$  неизвестно, для нахождения значения критерия  $y$  требуется задавать различные значения  $x$  и проводить эксперименты. Очевидно, что здесь с увеличением числа опытов (с уменьшением шага  $h$  задания  $x$ ) затраты на эксперименты возрастают. В то же время для повышения точности расчетов шаг  $h$  нужно уменьшать.

Существуют различные способы улучшения метода. В частности, сканирование с переменным шагом. На первом этапе сканирование выполняют с крупным шагом, в результате выявляют отрезок, где получено экстремальное значение критерия. Полученный отрезок исследуют с меньшим шагом и т. д.

### Задание № 3.1 и пример расчета

Путь от остановки автобуса в т.  $A$  (рис. 3.2) до лодочной станции в т.  $B$  проходит по асфальтированной дороге шириной  $S_1$  и полосе песка шириной  $S_2$ . Скорость движения пешехода по асфальту  $V_1$ , по песку  $V_2$ . Расстояние между точками  $A$  и  $B$  вдоль береговой линии равно  $L$ . Необходимо выбрать оптимальный маршрут, при котором время движения  $T$  будет минимальным.

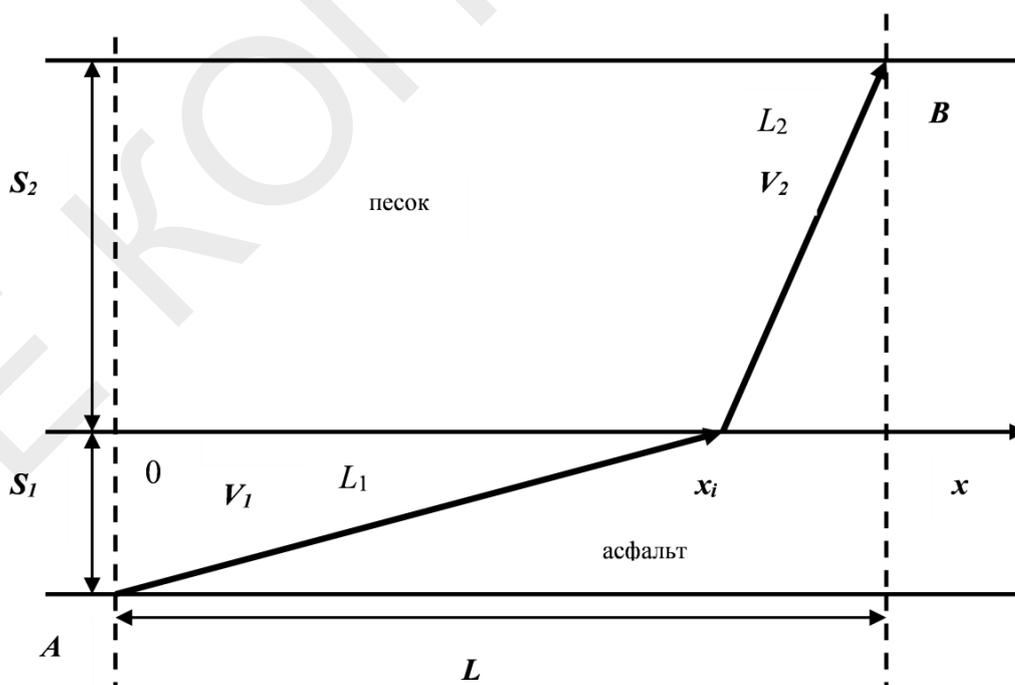


Рис. 3.2. К задаче выбора маршрута

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	$S_1$ , км	$S_2$ , км	$V_1$ , км/час	$V_2$ , км/час	$L$ , км
1	0,5	1,0	5,0	3,0	3,5
2	0,7	1,2	5,5	2,2	4,0
3	0,6	2,0	5,5	2,5	3,5
4	0,8	2,5	6,0	3,0	3,8
5	0,3	1,5	6,5	4,0	2,9
6	0,4	1,9	5,5	3,2	3,6
7	0,6	2,2	5,5	2,8	4,2
8	0,4	2,8	6,0	2,9	3,8
9	0,2	1,9	5,5	2,5	4,0
10	0,3	2,1	5,8	3,0	4,4

Рассмотрим использование метода сканирования на примере задачи выбора оптимального маршрута.

Обсудим основные этапы и методику решения задачи.

Критерий оптимизации указан в условии задачи – время движения  $y = T$  по маршруту.

Далее необходимо разработать математическую модель задачи, то есть составить аналитическое выражение, устанавливающее зависимость критерия оптимизации  $T$  от переменной (параметра проектирования).

В качестве параметра проектирования примем  $x_i$  (см. рис. 3.2) – значение координаты на оси  $Ox$ , где происходит переход с асфальта на песок. Очевидными ограничениями на значения  $x_i$  будут:

$$0 \leq x_i \leq L.$$

Рассмотрим один из возможных вариантов математической модели (вы можете предложить свою).

Определим длины отрезков движения по асфальту и песку как гипотенузы соответствующих прямоугольных треугольников:

$$L_1(x_i) = \sqrt{x_i^2 + S_1^2}, \quad (3.3)$$

$$L_2(x_i) = \sqrt{(L - x_i)^2 + S_2^2}. \quad (3.4)$$

Время движения по маршруту:

$$T(x_i) = \frac{L_1(x_i)}{V_1} + \frac{L_2(x_i)}{V_2}. \quad (3.5)$$

На основе приведенных зависимостей можно записать и общее выражение для математической модели:

$$T(x_i) = \frac{\sqrt{x_i^2 + S_1^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(L - x_i)^2 + S_2^2}}{V_2}. \quad (3.6)$$

Однако для уменьшения ошибок при наборе формул рекомендуется проводить вычисления по формулам (3.3)–(3.6). К тому же некоторые результаты этих вычислений будут использованы при последующем анализе.

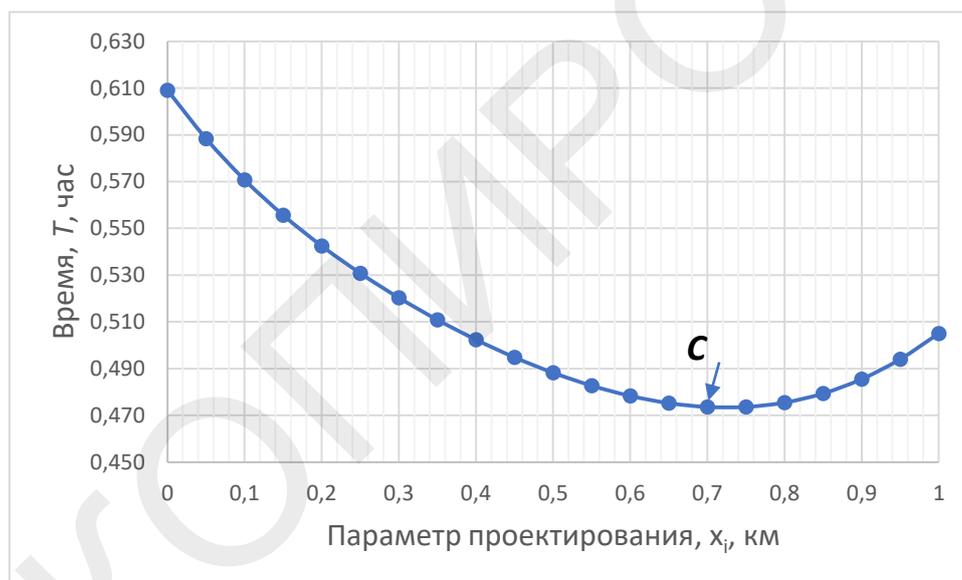


Рис. 3.2. Зависимость времени движения по маршруту от параметра проектирования

Можно попытаться решить задачу классическим методом. Если предпримете такую попытку, то убедитесь, что там есть свои сложности.

Обратите внимание на следующее. Если бы не удалось получить математическую модель  $T(x_i)$ , то пришлось бы искать оптимальное решение экспериментально, т. е. многократно прогуляться по разным маршрутам и определить оптимальный. Аналогичная ситуация возникает в технических задачах, когда неизвестна математическая модель.

Задаемся числом расчетных точек, например  $n = 21$ , рассчитываем шаг изменения параметра проектирования

$$h = \frac{L}{n - 1}.$$

Выполняем расчеты по формулам (3.3)–(3.6) и строим график зависимости  $T(x_i)$ . Для выполнения расчетов и построения графиков рекомендуется использовать электронные таблицы Microsoft Excel.

Пример вычислений приведен в табл. 3.2. В примере приняты следующие исходные данные:  $S_1 = 0,2$  км,  $S_2 = 0,5$  км,  $V_1 = 4$  км/час,  $V_2 = 2$  км/час,  $L = 1$  км,  $n = 21$ . По расчетным результатам и графику выбирается оптимальное решение

$$T_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = \min T(x).$$

В примере минимальное время, как следует из табл. 3.2, достигается при  $i = 15$ . Следовательно, оптимальное решение (точка **C** на графике):  $x_{\text{опт}} = 0,7$  км,  $T_{\text{опт}} = 0,4735$  час.

Таблица 3.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	$i$	$x_i$ , км	$L_1(x_i)$ , км	$L_2(x_i)$ , км	$T(x_i)$ , час	$L_1(x_i)+L_2(x_i)$ , км	$T_{\text{опт}}$ , час	ПОЗИЦ	$x_{\text{опт}}$ , км
3	1	0	0,200	1,118	0,6090	1,318	0,473	15	0,7
4	2	0,05	0,206	1,074	0,5883	1,280			
5	3	0,1	0,224	1,030	0,5706	1,253			
6	4	0,15	0,250	0,986	0,5555	1,236			
7	5	0,2	0,283	0,943	0,5424	1,226			
8	6	0,25	0,320	0,901	0,5307	1,222			
9	7	0,3	0,361	0,860	0,5203	1,221			
10	8	0,35	0,403	0,820	0,5108	1,223			
11	9	0,4	0,447	0,781	0,5023	1,228			
12	10	0,45	0,492	0,743	0,4947	1,236			
13	11	0,5	0,539	0,707	0,4882	1,246			
14	12	0,55	0,585	0,673	0,4826	1,258			
15	13	0,6	0,632	0,640	0,4783	1,273			
16	14	0,65	0,680	0,610	0,4752	1,290			

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
17	15	0,7	0,728	0,583	0,4735	1,311			
18	16	0,75	0,776	0,559	0,4735	1,335			
19	17	0,8	0,825	0,539	0,47541	1,363			
20	18	0,85	0,873	0,522	0,47931	1,395			
21	19	0,9	0,922	0,510	0,48544	1,432			
22	20	0,95	0,971	0,502	0,49395	1,473			
23	21	1	1,020	0,500	0,50495	1,520			

При большом количестве расчетных точек для определения оптимального решения можно использовать функции XL.

В табл. 3.2 показан пример определения оптимального (наименьшего) значения  $T_{\text{опт}}$  с помощью функции НАИМЕНЬШИЙ (рис. 3.3).

Аргументы функции могут задаваться как в окне функции, так и непосредственно в ячейке.

В рассматриваемом примере запись в ячейке G3 имеет вид: =НАИМЕНЬШИЙ(E3:E23;1)

Здесь E3:E23 – диапазон изменения элементов массива, в котором определяется наименьшее значение; 1 – первое наименьшее значение.

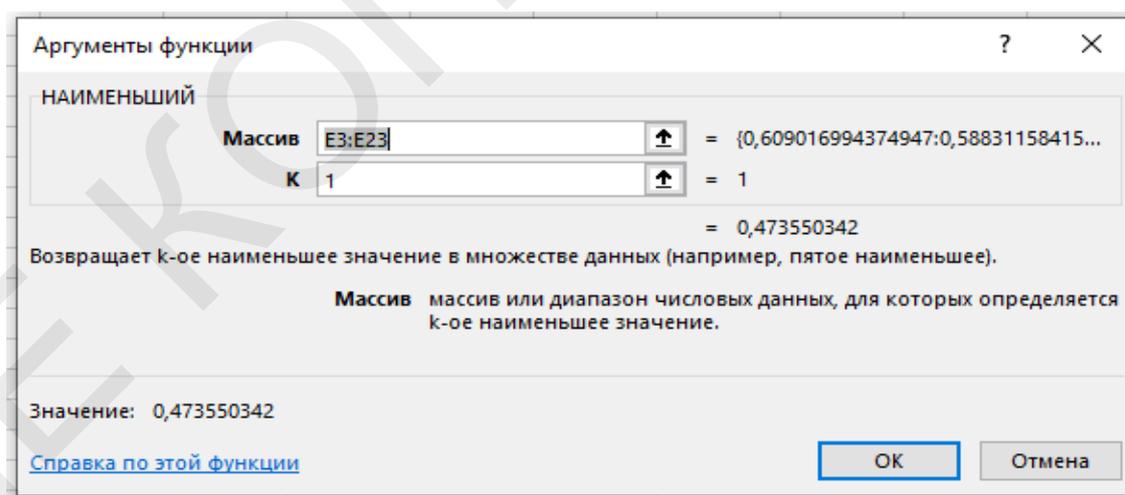


Рис. 3.3. Синтаксис функции НАИМЕНЬШИЙ

Для определения  $x_{\text{опт}}$  предварительно с использованием функции ПОИСКПОЗ (рис. 3.4) находим позицию (значение  $i$ ), соответствующую  $T_{\text{опт}}$ .

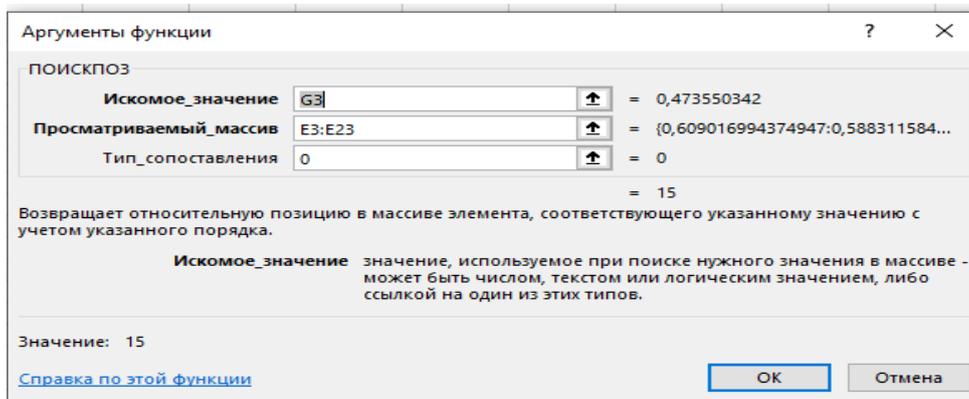


Рис. 3.4. Синтаксис функции ПОИСКПОЗ

Запись в ячейке Н3 имеет вид:

=ПОИСКПОЗ(G3;E3:E23; 0)

Здесь G3 – ссылка на ячейку, в которой содержится значение  $T_{\text{опт}}$ ,

E3:E23 – просматриваемый массив, 0 – указывает, что ищется элемент, значение которого совпадает с  $T_{\text{опт}}$ .

Определив позицию  $T_{\text{опт}}$ , несложно найти  $x_{\text{опт}}$ , используя функцию ИНДЕКС (рис. 3.5).

Формула в ячейке I3 имеет вид:

=ИНДЕКС(B3:B23;H3)

Здесь B3:B23 – массив значений  $x$ , H3 – ссылка на ячейку, в которой указана позиция  $x_{\text{опт}}$ .

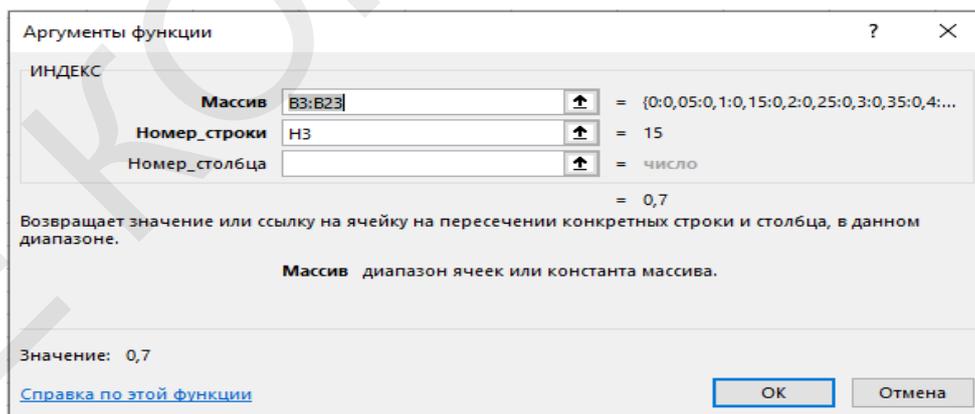


Рис. 3.5. Синтаксис функции ИНДЕКС

### Оценка эффективности оптимизации

Для оценки нужно сравнить время  $T_{\text{опт}}$  с временем движения, которое будет при некотором другом варианте – назовем его *рацио-*

**нальным.** За рациональный вариант можно принять, например, движение по кратчайшему маршруту – по прямой, соединяющей точки  $A$  и  $B$  (см. рис. 3.1). Чтобы найти время движения  $T_{\text{рац}}$  по этому маршруту, нужно дополнить расчетную таблицу еще одним столбцом, в котором вычисляется суммарный путь

$$L = L_1 + L_2.$$

Минимальное значение  $L$  в этом столбце будет соответствовать варианту движения по прямой с определенным временем  $T_{\text{рац}}$ . Минимальной длина пути (движение по прямой), как следует из табл. 3.2, будет при значении параметра проектирования  $x_i = x_0 = 0,3$  км.

Значение  $x_0$  можно определить и аналитически, используя теорему о пропорциональных отрезках:

$$\frac{x_0}{L} = \frac{S_1}{S_1 + S_2}; \Rightarrow x_0 = \frac{S_1}{S_1 + S_2} L = \frac{0,2}{0,2 + 0,5} * 1 = 0,286 \text{ км.}$$

По рассчитанным данным (см. табл. 3.2) время движения для  $x_0 = 0,3$  км,  $T_{\text{рац}} = 0,5202$  час. Выигрыш во времени в случае использования оптимального решения вместо рационального составляет

$$\Delta = \frac{T_{\text{рац}} - T_{\text{опт}}}{T_{\text{опт}}} 100 \% = \frac{0,5203 - 0,4735}{0,4735} * 100 \% = 9,9 \%$$

### Содержание отчета

1. Постановка задачи исследования и исходные данные для исследования.
2. Математическая формулировка задачи.
3. Графики и таблицы расчета зависимости  $T(x)$ .
4. Сравнение оптимального решения с решением двигаться по прямой.
5. Выводы по работе.

## 4. ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МЕТОДОМ ДИХОТОМИИ

### Краткие теоретические сведения

Рассмотрим решение одномерных задач оптимизации методом дихотомии (деления отрезка пополам). При использовании этого метода предполагается, что функция  $y = f(x)$  имеет **единственный экстремум** в области определения на отрезке  $[a, b]$ .

Задача заключается в отыскании оптимального значения  $x_{\text{опт}}$ , при котором достигается экстремум критерия оптимизации. Для случая поиска минимума:

$$y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = \min y(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Исходный отрезок неопределенности, на котором осуществляется поиск:

$$L = b - a.$$

Поясним методику поиска методом дихотомии, используя рис. 4.1. Отметим, что фактически график функции неизвестен и используется здесь только для пояснения метода. Рассматриваем задачу минимизации.

Поиск осуществляют в следующей последовательности.

На первом шаге принимаем начальное и конечное значения отрезка неопределенности:

$$x_{n1} = a, x_{k1} = b.$$

Вычисляем середину исходного отрезка неопределенности:

$$x_{01} = x_{n1} + \frac{x_{k1} - x_{n1}}{2}.$$

Даем небольшое смещение  $\pm \varepsilon$  относительно середины  $x_{01}$  отрезка и вычисляем значения аргумента и функции в левой и правой точках испытаний (см. рис. 4.1):

$$x_{l1} = x_{01} - \varepsilon; \quad x_{p1} = x_{01} + \varepsilon;$$
$$y(x_{l1}); \quad y(x_{p1}).$$

Очевидно, что если  $y(xl_1) < y(xp_1)$ , то минимум функции лежит левее точки  $x_{01}$ , в противном случае – правее  $x_{01}$ . Предположим, что, как показано на рис. 4.1, выполняется первое условие. Тогда отрезок  $(x_{01}, b)$  можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

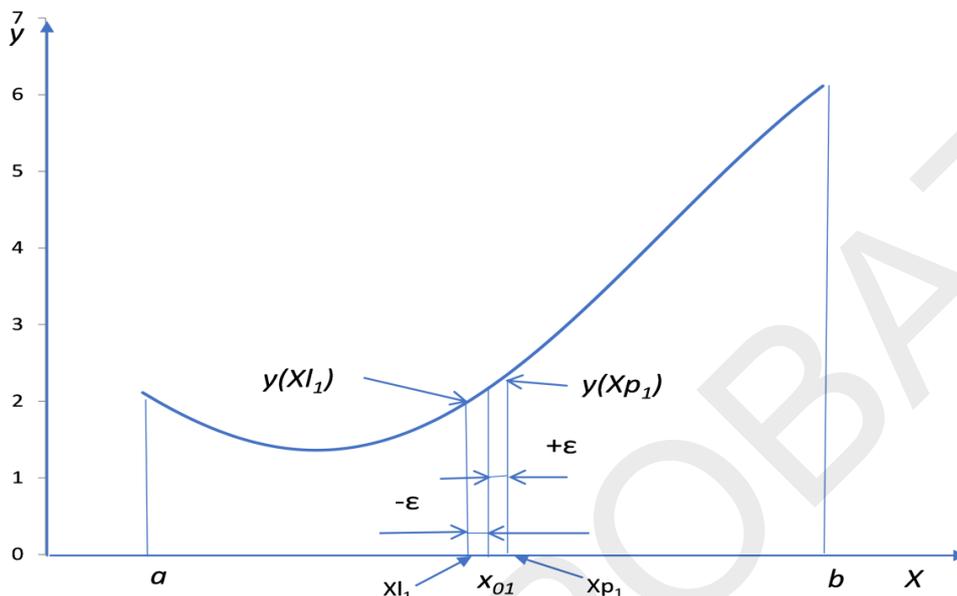


Рис. 4.1. Пояснения к методу дихотомии

В этом случае на втором шаге поиска принимаем  $x_{n2} = x_{n1}$ ,  $x_{k2} = x_{01}$ . Далее аналогично вычисляем середину второго отрезка неопределенности:

$$x_{02} = x_{n2} + \frac{x_{k2} - x_{n2}}{2},$$

а также значения аргумента и функции в двух точках:

$$xl_2 = x_{02} - \varepsilon; \quad xp_2 = x_{02} + \varepsilon;$$

$$y(xl_2); \quad y(xp_2).$$

Анализируя результат аналогично изложенному выше, исключаем из дальнейшего рассмотрения еще половину оставшегося на втором этапе отрезка неопределенности.

Далее вычислительные процедуры повторяются.

На каждом шаге определяется критерий оптимизации в двух точках: число испытаний (вычислений, опытов) на каждом шаге  $n = 2$ .

При этом исходный отрезок неопределенности после каждого шага уменьшается в два раза:

- после первого шага ( $n = 2$ ) в 2 раза до значения  $L/2$ ;
- после второго шага ( $n = 4$ ) в 4 раза до значения  $L/4$ ;
- после третьего шага ( $n = 6$ ) в 4 раза до значения  $L/8$ .

Общее выражение зависимости остающегося отрезка неопределенности от  $n$  можно представить в виде

$$\frac{L}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

За *показатель эффективности*, как и в методе сканирования, можно принять отношение исходного отрезка неопределенности к остающемуся после  $n$  вычислений.

Для метода дихотомии этот показатель составит:

$$ef = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Следовательно, например, при  $n = 20$  исходный отрезок неопределенности уменьшается в  $2^{10} = 1024$ . Напомним, что при использовании метода сканирования для  $n = 20$  он уменьшается в 10 раз. Приведенные результаты показывают эффективность метода дихотомии.

Погрешность вычисления параметра проектирования и критерия оптимизации при поиске методом дихотомии оценивают, сравнивая результаты их вычисления на последовательных шагах:

$$\Delta y = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_i} 100 \%; \quad \Delta x = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} 100 \%, \quad (4.1)$$

где  $i$  – номер шага.

Поиск заканчивают после достижения допустимой погрешности вычислений или заданного числа шагов.

**Алгоритм поиска** по методу дихотомии для случая поиска минимума можно записать в следующем виде:

1. Принять  $x_{n1} = a$ ,  $x_{k1} = b$ .
2. Вычислить

$$x_{01} = x_{n1} + \frac{x_{k1} - x_{n1}}{2}.$$

3. Задаться значением  $\varepsilon$  и вычислить значения аргумента и функции:

$$xl_1 = x_{01} - \varepsilon; \quad xp_1 = x_{01} + \varepsilon;$$
$$y(xl_1); \quad y(xp_1).$$

4. Если  $y(xl_1) < y(xp_1)$ , то принять  $x_{n2} = x_{n1}$ , иначе  $x_{n2} = x_{01}$ .

Если  $y(xl_1) < y(xp_1)$ , то принять  $x_{k2} = x_{01}$ , иначе  $x_{k2} = x_{k1}$ .

После выполнения п. 4 из дальнейшего рассмотрения будет исключена левая или правая половина исходного отрезка неопределенности.

5. Далее выполнять вычисления аналогично.

6. Вычисления закончить при достижении заданной погрешности или заданного числа шагов.

### Контрольные вопросы

1. Поясните, как ведется поиск методом дихотомии.
2. Какие ограничения имеет этот метод поиска?
3. Как оценивается погрешность поиска по параметру проектирования и критерию оптимизации?
4. Какова эффективность поиска методом дихотомии?

### Задание № 4.1 и пример расчетов

Разработать программу поиска методом дихотомии для рассмотренной в предыдущем задании задачи оптимизации маршрута движения, проанализировать полученные результаты.

Рассмотрим реализацию алгоритма поиска методом дихотомии с использованием таблиц XL.

В примере приняты следующие исходные данные  $S_1 = 0,2$  км,  $S_2 = 0,5$  км,  $V_1 = 4$  км/час,  $V_2 = 2$  км/час,  $L = 1$  км.

Пример вычислений приведен в табл. 4.1.

Для рассматриваемой задачи с учетом принятых в предыдущем задании обозначений алгоритм поиска можно представить в следующем виде.

1. На первом шаге принимаем  $x_{n1} = 0$ ,  $x_{k1} = L$ .
2. Вычисляем

$$x_{01} = x_{n1} + \frac{x_{k1} - x_{n1}}{2}.$$

*Замечание.* Хотя на первом шаге  $x_{n1} = 0$ , формулу нужно записывать в общем виде, так как на последующих шагах значение  $x_{n1}$  будет меняться.

3. Задаем  $\varepsilon$  (в примере принято  $\varepsilon = 0,02L$ ), вычисляем значения

$$xl_1 = x_{01} - \varepsilon; xp_1 = x_{01} + \varepsilon.$$

Критерий оптимизации в рассматриваемой задаче – время движения от остановки автобуса до лодочной станции. Для вычисления критерия оптимизации используем математическую модель предыдущей работы и последовательно вычисляем значения длины участков движения по асфальту и по песку и время движения по этим участкам (см. табл. 4.1):

– для правой точки испытаний:

$$L_1(xp_1) = \sqrt{(xp_1)^2 + S_1^2},$$

$$L_2(xp_1) = \sqrt{(L - xp_1)^2 + S_2^2},$$

$$T(xp_1) = L_1(xp_1)/V_1 + L_2(xp_1)/V_2,$$

– для левой точки испытаний:

$$L_1(xl_1) = \sqrt{xl_1^2 + S_1^2},$$

$$L_2(xl_1) = \sqrt{(L - xl_1)^2 + S_2^2},$$

$$T(xl_1) = L_1(xl_1)/V_1 + L_2(xl_1)/V_2.$$

Обратите внимание, что теперь аргументом в формулах математической модели вместо  $x_i$  используются значения  $xp_1$  и  $xl_1$ . Результаты расчетов на первом шаге приведены в строке 2 табл. 4.1.

Пункт 4 рассмотренного алгоритма поиска могут быть реализованы в *диалоговом* режиме либо с использованием логических функций *XL*.

**В диалоговом режиме:**

Таблица 4.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	шаг	Xn1 км	Xk1 км	x0i км	Xp1 км	Xi км	L1(xp1) км	L2(xp1) км	T(xp1) час	L1(xl1) км	L2(xl1) км	T(xl1) час	ΔT,%	Δx%
2	1	0,000	1,000	0,500	0,520	0,480	0,557	0,693	0,486	0,520	0,721	0,491		
3	2	0,500	1,000	0,750	0,770	0,730	0,796	0,550	0,474	0,757	0,568	0,473	3,535	33,3
4	3	0,500	0,750	0,625	0,645	0,605	0,675	0,613	0,475	0,637	0,637	0,478	-0,455	-20,0
5	4	0,625	0,750	0,688	0,708	0,668	0,735	0,579	0,473	0,697	0,600	0,474	0,346	9,1
6	5	0,688	0,750	0,719	0,739	0,699	0,765	0,564	0,473	0,727	0,584	0,474	0,086	4,3
7	6	0,719	0,750	0,734	0,754	0,714	0,780	0,557	0,474	0,742	0,576	0,473	0,020	2,1
8	7	0,719	0,734	0,727	0,747	0,707	0,773	0,561	0,474	0,734	0,580	0,473	-0,008	-1,1
9	8	0,719	0,727	0,723	0,743	0,703	0,769	0,562	0,473	0,731	0,582	0,474	-0,005	-0,5
10	9	0,723	0,727	0,725	0,745	0,705	0,771	0,561	0,473	0,732	0,581	0,473	0,003	0,3
11	10	0,725	0,727	0,726	0,746	0,706	0,772	0,561	0,473	0,733	0,580	0,473	0,001	0,1

4. Сравниваем значение  $T(xp_1)$  и  $T(xl_1)$  и определяем значение  $x_{n2}$  и  $x_{k2}$ .

Если  $T(xl_1) < T(xp_1)$ , то принимаем  $x_{n2} = x_{n1}$  и задаем «вручную» это значение в ячейке В3. Иначе принимаем  $x_{n2} = x_{01}$  и задаем «вручную» это значение в ячейке В3. (Копировать значение  $x_{01}$  не следует – вместо значения будет копироваться формула).

Если  $T(xl_1) < T(xp_1)$ , то принимаем  $x_{k2} = x_{01}$ , иначе принимаем  $x_{k2} = x_{k1}$ . Задаем «вручную» это значение в ячейке С3.

5. Далее выполняем вычисления аналогично.

6. Вычисления заканчиваем при достижении заданной погрешности или заданного числа шагов.

Вычисления по п. 4 при использовании **логических функций XL** выполняются следующим образом.

Переписываем общие формулы для расчета начала и конца отрезка неопределенности с учетом принятых обозначений для рассматриваемой задачи:

Если  $T(xl_1) < T(xp_1)$ , то принять  $x_{n2} = x_{n1}$ , иначе  $x_{n2} = x_{01}$ .

Для выполнения этого пункта в ячейке В3, в которой определяется  $x_{n2}$ , задаем логическую функцию ЕСЛИ (рис. 4.2).

Учитывая, что в примере значение  $T(xl_1)$  содержится в ячейке L2, а значение  $T(xp_1)$  в ячейке I2, записываем в строку

**лог\_выражение**  $L2 < I2$ .

Учитывая, что значение  $x_{n1}$  находится в ячейке В2, записываем в строку

**Значение\_если\_истина** В2.

Из аналогичных соображений записываем в строку

**Значение\_если\_ложь** D2.

После нажатия иконки ОК запись в ячейке В3 будет иметь вид:  
=ЕСЛИ(L2<I2;B2;D2).

Для нахождения  $x_{k2}$  используем выражение

Если  $T(x_{l1}) < T(x_{p1})$ , то принять  $x_{k2} = x_{01}$ , иначе  $x_{k2} = x_{k1}$ .

Используя логическую функцию ЕСЛИ, сделайте соответствующие записи в ячейке, в которой вычисляется  $x_{k2}$ .

Далее достаточно просто скопировать формулы в последующие строки.

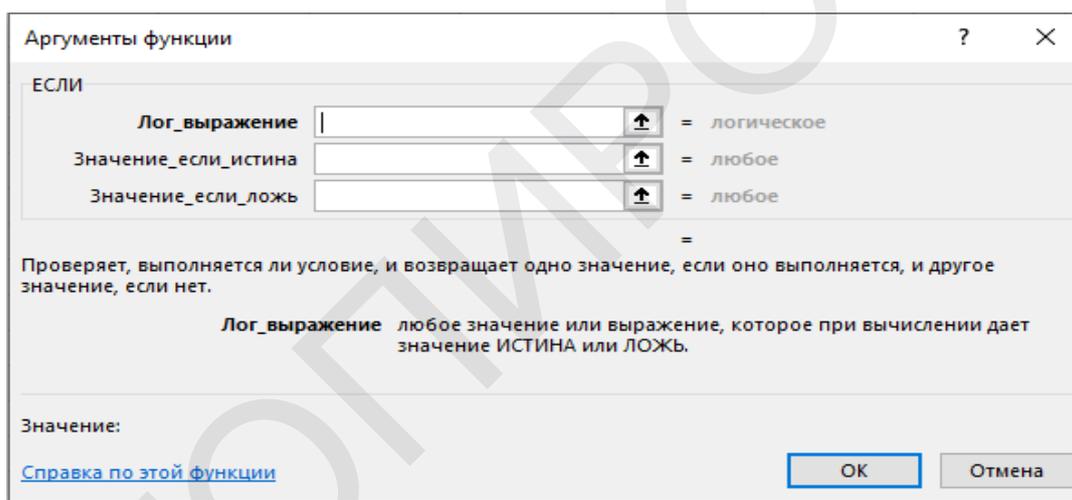


Рис. 4.2. Логическая функция ЕСЛИ

### *Рекомендации по проверке работы программы*

Набрав первые две строки, проверьте правильность вычислений.

Для этого используйте график или расчетные данные из предыдущей работы. Из них, в частности, следует, что минимум функции лежит правее середины отрезка  $L$ . Следовательно, на втором шаге расчетов должно получиться:  $x_{n2} = x_{01}$  и  $x_{k2} = x_{k1}$ .

Если это не так – ищите ошибки. Если в первых двух строках результаты расчетов правильные, то дальше формулы можно просто скопировать.

В столбцах  $M$  и  $N$  табл. 4.1 рассчитаны по формулам (4.1) погрешности определения параметра проектирования и критерия оптимизации.

При расчетах по формулам (4.1) за  $x_i$  и  $x_{i-1}$  следует принимать  $x_{0i}$  и  $x_{0,i-1}$ , то есть значения  $x_0$  на текущем и предыдущем шаге. В качестве  $y_i$  и  $y_{i-1}$  нужно использовать значения  $T(xp_i)$  и  $T(xp_{i-1})$ , то есть значения критерия оптимизации на текущем и предыдущем шаге.

На рис. 4.3 показано, как изменяются найденные значения  $x_{\text{опт}i}$  по мере увеличения числа шагов (в качестве  $x_{\text{опт}i}$  принято значение  $x_{0i}$ ).

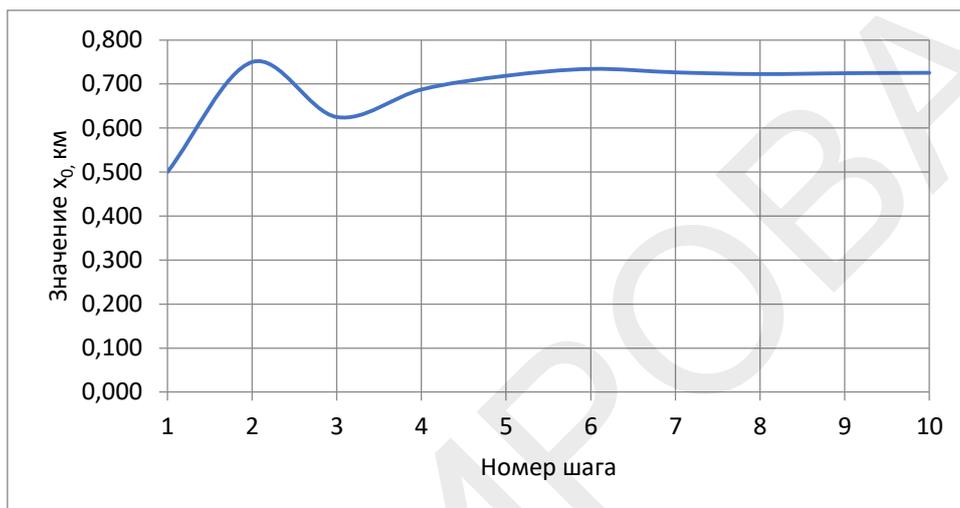


Рис. 4.3. График зависимости вычисленного значения параметра проектирования  $x_{0i}$  от шага поиска

На рис. 4.4 и рис. 4.5 показаны зависимости погрешности вычисления параметра проектирования и критерия оптимизации от шага поиска.



Рис. 4.4. График зависимости погрешности вычисления оптимального значения параметра проектирования от шага поиска



Рис. 4.5. График зависимости погрешности вычисления критерия оптимизации от шага поиска

### Содержание отчета

1. Постановка задачи исследования.
2. Разработка алгоритма и программы.
3. Результаты расчетов в виде таблицы и графиков.

Выводы. Оцените погрешности найденного решения по параметру проектирования и критерию оптимизации для различных значений шагов поиска; отметьте, сколько нужно шагов поиска для снижения погрешности вычисления параметра проектирования до значения меньше 5 %; сравните оптимальные значения параметра проектирования и критерия, полученные в предыдущей и этой работе; оцените эффективность поиска методом дихотомии по сравнению с методом сканирования.

## 5. ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

### Краткие теоретические сведения

Рассмотрим метод решения одномерных задач оптимизации методом золотого сечения. При использовании этого метода предполагается, что функция  $y = f(x)$  имеет единственный экстремум в области определения на отрезке  $[a, b]$ .

Задача оптимизации заключается в отыскании оптимального значения  $x_{\text{опт}}$ , при котором достигается минимум критерия оптимизации

$$y_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}) = \min y(x)$$

для любого значения  $a \leq x \leq b$ .

Поясним пропорции золотого сечения на примере деления отрезка длиной  $L$  на две части (рис. 5.1).



Рис. 5.1. Деление отрезка в пропорции золотого сечения

Говорят, что отрезок поделен в пропорции золотого сечения, если отношение большей части  $L_1$  к целому  $L$  равно отношению меньшей части  $L_2$  к большей:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{L_2}{L_1} = \tau,$$

где  $\tau$  – пропорция золотого сечения.

Значение  $\tau$  определяется из уравнения

$$L_1 + L_2 = L; \Leftrightarrow L\tau + L\tau^2 = L$$

и выражается иррациональным числом

$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618 \dots$$

Поясним методику поиска методом золотого сечения, используя рис. 5.2. Отметим, что фактически график функции неизвестен и используется здесь только для пояснения метода. Этот метод имеет некоторое сходство с методом дихотомии, но точки, в которых проводятся испытания, выбирают, используя пропорции так называемого золотого сечения.

Поиск минимума осуществляют в следующей последовательности.

На первом шаге для исходного отрезка неопределенности принимают  $x_{n1} = a$ ,  $x_{k1} = b$ . На исходном отрезке неопределенности проводят два испытания. Значения аргумента в левой  $x_{l1}$  и правой  $x_{p1}$  точке испытаний вычисляют по выражениям

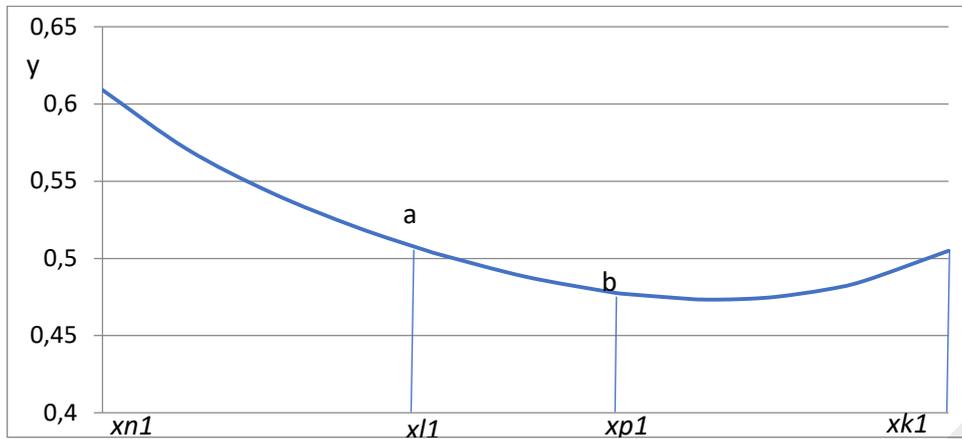
$$x_{l1} = x_{n1} + (x_{k1} - x_{n1})\tau^2; \quad (5.1)$$

$$x_{p1} = x_{k1} - (x_{k1} - x_{n1})\tau^2, \quad (5.2)$$

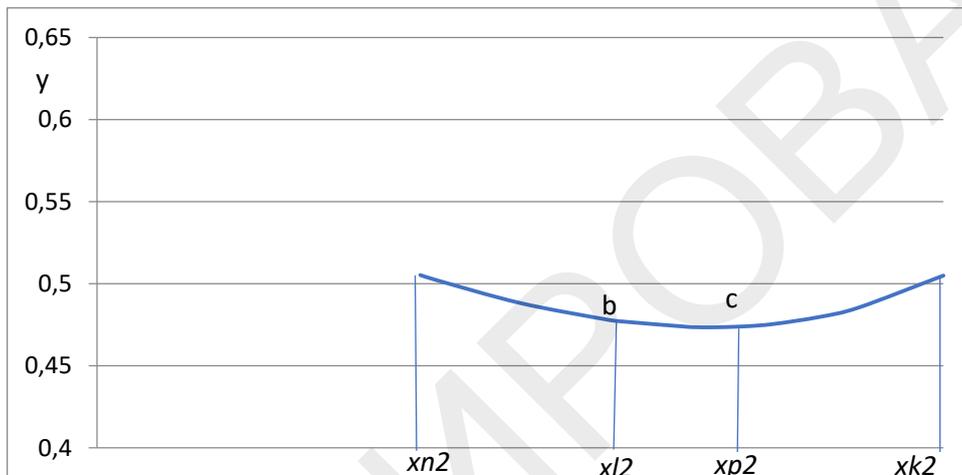
где  $\tau$  – пропорция золотого сечения, равная

$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618.$$

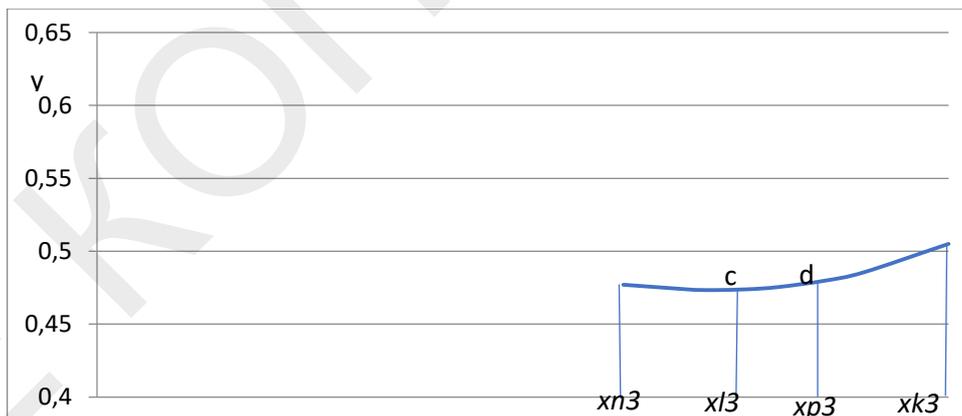
Определяют значение функции в левой ( $a$ ) и правой ( $b$ ) точках испытаний:  $y(x_{l1})$  и  $y(x_{p1})$ . Если значение функции в точке  $a$  больше, чем в точке  $b$ , то очевидно, минимум функции лежит правее точки  $a$ . Следовательно, отрезок левее точки  $x_{l1}$  можно исключить из дальнейшего рассмотрения и принять в качестве нового отрезка неопределенности  $[x_{n2} = x_{l1}, x_{k2} = x_{k1}]$ .



*a*



*б*



*в*

*Рис. 5.2.* К поиску экстремума методом золотого сечения

Далее оставшийся отрезок неопределенности (рис. 5.2, б) вновь делят в пропорции золотого сечения и находят значение  $x_{p2}$ . Вычисляют значение функции  $y(x_{p2})$  в точке  $c$ . Значение функции в точке  $b$

уже найдено на предыдущем шаге. И из аналогичных соображений (для приведенного примера) исключают из дальнейшего рассмотрения отрезок левее точки  $v$ .

Оставшийся отрезок неопределенности ( $x_{n3} = x_{l2}$ ,  $x_{k3} = x_{k2}$ ) вновь делят в пропорции золотого сечения и получают точку  $x_{p3}$ , находят значение функции  $y(x_{p3})$  в точке  $d$  (в точке  $c$  оно уже найдено). В приведенном примере далее можно исключить из рассмотрения отрезок  $(x_{p3}, x_{k3})$  и т. д.

Таким образом, **алгоритм поиска** можно записать в следующем виде:

1. На первом шаге  $i = 1$  поиска принять  $x_{n1} = a$ ;  $x_{k1} = b$ .

2. Вычислить

$$x_{li} = x_{ni} + (x_{ki} - x_{ni})\tau^2; \quad x_{pi} = x_{ki} - (x_{ki} - x_{ni})\tau^2.$$

3. Вычислить  $y(x_{li})$ ;  $y(x_{pi})$ .

4. Если  $y(x_{li}) > y(x_{pi})$ , то принять  $x_{n(i+1)} = x_{li}$ , иначе

$$x_{n(i+1)} = x_{ni}.$$

Если  $y(x_{li}) > y(x_{pi})$ , то принять  $x_{k(i+1)} = x_{ki}$ , иначе

$$x_{k(i+1)} = x_{pi}.$$

5. Увеличить номер шага на 1:  $i = i + 1$ , продолжить вычисления по пунктам 2–5 с заданным числом шагов.

Объем вычислений можно уменьшить, если учесть, что начиная со второго шага одно из значений функции на отрезке неопределенности уже найдено на предыдущем шаге. Алгоритм в этом случае необходимо соответствующим образом скорректировать.

Понятие золотого сечения тесно связано с так называемыми **числами (последовательностью) Фибоначчи**.

Последовательность Фибоначчи – это такая последовательность чисел, где каждое последующее число начиная с третьего равно сумме двух предыдущих:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... и дальше до бесконечности.

По мере увеличения члена последовательности Фибоначчи отношение предыдущего числа к последующему приближается к пропорции золотого сечения. Так, например,  $21/34 = 0,6176\dots$

Существует метод поиска экстремума функций с использованием чисел Фибоначчи. Причем его эффективность при малом числе испытаний выше, чем метода золотого сечения.

Оценим *эффективность поиска* методом золотого сечения.

За *показатель эффективности*, как и в предыдущих методах, можно принять отношение исходного отрезка неопределенности к остающемуся после  $n$  вычислений. Иными словами, он показывает, во сколько раз сокращается исходный отрезок неопределенности после  $n$  испытаний.

После двух испытаний,  $n = 2$ , отрезок неопределенности будет равен  $L\tau$ , то есть сократится в  $1/\tau$  раз. После трех испытаний,  $n = 3$ , отрезок неопределенности будет равен  $L\tau^2$ , то есть сократится в  $1/\tau^2$  раз. Рассуждая аналогично, несложно предложить общую формулу для показателя эффективности поиска методом золотого сечения:

$$ef_{\text{зол.сеч}} = \frac{1}{\tau^{n-1}}. \quad (5.3)$$

Сравним эффективность поиска методом золотого сечения и методом дихотомии. В методе дихотомии на каждом шаге проводится два испытания и отрезок неопределенности уменьшается в два раза.

Напомним, что показатель эффективности для этого метода:

$$ef_{\text{дих}} = 2^{\frac{n}{2}}. \quad (5.4)$$

В методе золотого сечения на первом шаге проводится также два испытания, и отрезок неопределенности уменьшается в  $1/\tau = 1,62$  раза, то есть меньше, чем в методе дихотомии. Но на последующих шагах проводится только одно испытание, и эффективность метода золотого сечения становится больше, чем метода дихотомии.

Для метода сканирования показатель эффективности

$$ef_{\text{скан}} = \frac{n-1}{2}. \quad (5.5)$$

## Контрольные вопросы

1. Что понимается под пропорцией золотого сечения?
2. Поясните алгоритм поиска экстремума методом золотого сечения.
3. За счет чего поиск методом золотого сечения оказывается эффективнее метода дихотомии?
4. Как формируется последовательность Фибоначчи?
5. Дайте сравнительную оценку эффективности поиска различными методами.

### Задание № 5.1 и пример расчетов

Требуется для задачи выбора маршрута, рассмотренной выше, найти оптимальное решение, используя метод золотого сечения.

Разработайте алгоритм поиска для конкретной рассматриваемой задачи. Проведите расчеты для нахождения оптимального маршрута. Для выполнения расчетов и построения графиков рекомендуется использовать электронные таблицы Microsoft Excel.

Фрагмент вычислений для рассматриваемой задачи приведен в табл. 5.1.

Таблица 5.1

№ шага	$x_n$ , км	$x_k$ , км	$x_l$ , км	$x_p$ , км	$T(x_l)$ , час	$T(x_p)$ , час	$\Delta T$ , %	$\Delta x$ , %
1	0,00	1,00	0,38	0,62	0,505	0,433	16,80	-38,21
2	0,38	1,00	0,62	0,76	0,477	0,474	0,66	-19,11
3	0,62	1,00	0,76	0,85	0,474	0,480	-1,22	-10,56
4	0,62	0,85	0,71	0,76	0,473	0,474	-0,09	-7,30
5	0,62	0,76	0,67	0,71	0,474	0,473	0,17	-4,87
6	0,67	0,76	0,71	0,73	0,473	0,473	0,02	-2,92
7	0,71	0,76	0,73	0,74	0,473	0,473	-0,02	-1,77
8	0,71	0,74	0,72	0,73	0,473	0,473	0,00	-1,12
9	0,71	0,73	0,72	0,72	0,473	0,473	0,00	-0,70
10	0,72	0,73	0,72	0,72	0,473	0,473	0,00	-0,43

В первой строке по алгоритму, изложенному выше, заданы значения  $x_n$ ,  $x_k$ , вычислены значения  $x_l$ ,  $x_p$ ,  $T(x_l)$ ,  $T(x_p)$ . Здесь в качестве функции  $y(x)$  рассматривается зависимость времени движения по вы-

бранному маршруту  $T(x)$ . Значения  $T(x)$  рассчитываются по формулам, разработанным в предыдущей работе (промежуточные результаты расчета времени  $T$  опущены).

Значения  $x_n, x_k$  во второй и последующих строках можно определять, как и в предыдущей работе, в интерактивном режиме либо с использованием логической функции *ЕСЛИ* в соответствии с пунктом 4 приведенного выше алгоритма.

Оценки погрешности определения аргумента и функции рассчитаны по выражениям

$$\Delta x = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} 100 \% ; \quad \Delta T = \frac{T_{i+1} - T_i}{T_{i+1}} 100 \% . \quad (5.6)$$

Постройте графики зависимости вычисленных значений  $x_{\text{опт}}$  от числа шагов поиска (пример графика приведен на рис. 5.3).

Постройте графики зависимости оценок погрешности определения оптимальных значений аргумента и функции от числа шагов поиска.



Рис. 5.3. График зависимости  $x_{\text{опт}}$  от номера шага

Сравните эффективность поиска методом сканирования, дихотомии и золотого сечения. Рассчитайте по формулам (5.3)–(5.5) эффективность поиска рассмотренными методами при значениях  $n = 2–10$  (табл. 5.2). Постройте графики зависимости эффективности поиска от числа испытаний  $n$ . Сделайте выводы об эффективности.

Таблица 5.2

$n$	$ef_{\text{зол.сеч}}$	$ef_{\text{дих}}$	$ef_{\text{скан}}$
1			
2			
...			
10			

### Содержание отчета

1. Краткие теоретические сведения по поиску экстремума методом золотого сечения и расчетные формулы для итерационного процесса поиска.
2. Формулировка конкретной задачи поиска.
3. Результаты расчетов в виде таблиц и графиков.
4. Выводы по работе с оценкой эффективности поиска методом золотого сечения.

## 6. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

### Краткие теоретические сведения

В предыдущих разделах рассматривались методы нахождения оптимального решения для задач, в которых критерий оптимизации является нелинейной функцией одной переменной, – *задачи с одномерной нелинейной моделью*.

Существуют разнообразные задачи, в которых критерий оптимизации является нелинейной функцией  $n$  проектных параметров  $x_i$  – *задачи с многопараметрической нелинейной моделью*.

Одним из методов решения таких задач является метод неопределенных множителей Лагранжа. При использовании этого метода предполагается, что известно аналитическое выражение для критерия оптимизации

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6.1)$$

Кроме того, заданы ограничения, называемые уравнениями связи, в виде

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n. \quad (6.2)$$

Требуется найти экстремум функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с учетом ограничений (6.2).

Для решения задачи составляется функция Лагранжа

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.3)$$

где  $\lambda_i$  – неопределенные множители Лагранжа.

Для отыскания экстремума берутся частные производные от функции Лагранжа по всем ее аргументам и приравниваются нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial L}{\partial x_m} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Получается система из  $(n + m)$  уравнений с  $(n + m)$  неизвестными.

Решение этой системы определяет стационарную точку функции (6.1) при условиях связи (6.2), то есть точку, в которой может существовать экстремум. Во многих случаях для практических задач наличие экстремума определяется физическим смыслом задачи и не требует дополнительной проверки.

### Контрольные вопросы

1. Напишите выражение для функции Лагранжа, расшифруйте обозначения.
2. В каком виде записываются уравнения связи?
3. Как ищется оптимальное решение?

### Задание № 6.1 и пример расчетов

Рассмотрим подробнее методику использования метода Лагранжа на примере конкретных задач.

**1) Задача выбора оптимальных параметров цилиндрической емкости.**

Проектируется бак для жидкости заданного объема  $V_0$  (исходные данные для расчета приведены в табл. 6.1).

Таблица 6.1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_0, \text{ м}^3$	0,5	0,7	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0

Бак предполагается выполнить цилиндрической формы (рис. 6.1, а) с радиусом основания  $r$  и высотой  $h$ . Требуется найти оптимальное решение (если оно существует), при котором расход материалов (поверхность бака  $S$ ) будет минимальным.

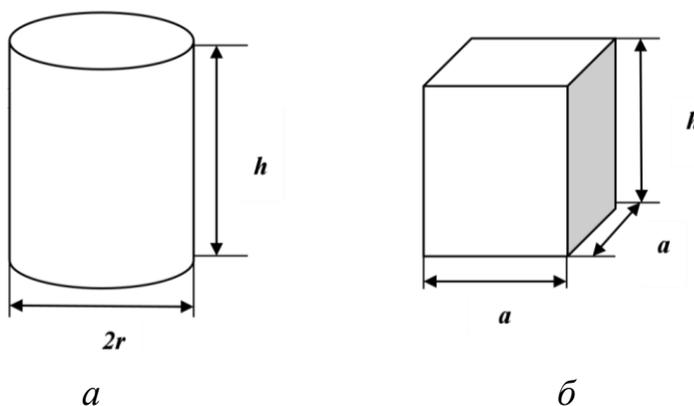


Рис. 6.1. К расчету оптимальных параметров емкости

В этой задаче *критерий оптимизации* (поверхность бака  $S$ ) является нелинейной функцией двух переменных: радиуса основания  $r$  и высоты  $h$ . Запишем эту функцию как сумму площадей цилиндрической поверхности и двух кругов – верхней и нижней крышек:

$$S(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2. \quad (6.5)$$

Записываем также выражение для объема бака:

$$V = \pi r^2 h.$$

Уравнение связи в этой задаче одно, и оно отражает требование: объем бака должен быть заданным  $V_0$ . Соответственно, уравнение связи записываем в форме (6.2):

$$g(r, h) = \pi r^2 h - V_0 = 0. \quad (6.6)$$

Далее составляем функцию Лагранжа

$$L = S(r, h) + \lambda g(r, h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 + \lambda(\pi r^2 h - V_0). \quad (6.7)$$

Берем от нее частные производные по всем ее аргументам ( $r, h, \lambda$ ) и приравниваем нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi h + 4\pi r + 2\lambda\pi rh = 0; \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0; \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - V_0 = 0. \quad (6.10)$$

Преобразуя (6.9), находим выражение для неопределенного множителя  $\lambda$ :

$$\pi r(2 + \lambda r) = 0; \rightarrow 2 + \lambda r = 0; \rightarrow \lambda = -\frac{2}{r}. \quad (6.11)$$

Преобразуя (6.8) и подставляя в него выражение для  $\lambda$  (6.11), получим:

$$\begin{aligned} 2\pi(h + 2r + \lambda rh) = 0; &\rightarrow h + 2r + \lambda rh = 0; \rightarrow h + 2r - \frac{2}{r}rh = 0. \rightarrow \\ &\rightarrow h + 2r - 2h = 0. \end{aligned}$$

Из последнего выражения найдем оптимальное соотношение радиуса и высоты:

$$h_{\text{опт}} = 2r_{\text{опт}}. \quad (6.12)$$

Таким образом, минимум расхода материала будет достигаться при выполнении соотношения (6.12). Для расчета оптимальных значений высоты и радиуса при заданном объеме бака используем выражение (6.12). При выполнении условия  $h_{\text{опт}} = 2r_{\text{опт}}$  получаем:

$$r_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}. \quad (6.13)$$

Далее проверим, действительно ли найденное решение обеспечивает минимум площади бака, а также проанализируем чувствительность критерия к изменению переменных. Иными словами, выясним, насколько значительно меняется расход материала (площадь) при отклонении  $r$  и  $h$  от оптимальных значений. Для этого будем изменять отношение  $\frac{h}{r} = k$  от 1 до 4 и вычислять значение  $S$ .

Чтобы объем бака оставался заданным, вычисления нужно вести следующим образом. Для определенного значения  $k$  находить значения

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{k\pi}}; \quad h = kr \quad \text{и} \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Пример таких расчетов для  $V_0 = 10 \text{ м}^3$  приведен в табл. 6.2.

Результаты расчетов показаны на рис. 6.2 в виде графика. Проанализируйте результаты расчетов.

Таблица 6.2

$k = h/r$	$r$	$h$	$S$
1,00	1,47	1,47	27,19
1,10	1,43	1,57	26,79
1,20	1,38	1,66	26,48
1,30	1,35	1,75	26,25

$k = h/r$	$r$	$h$	$S$
1,40	1,32	1,84	26,07
1,50	1,29	1,93	25,93
1,60	1,26	2,01	25,84
1,70	1,23	2,10	25,77
1,80	1,21	2,18	25,72
1,90	1,19	2,26	25,70
<b>2,00</b>	<b>1,17</b>	<b>2,34</b>	<b>25,69</b>
2,10	1,15	2,41	25,70
2,20	1,13	2,49	25,72
2,30	1,11	2,56	25,75
2,40	1,10	2,64	25,78
2,50	1,08	2,71	25,83
2,60	1,07	2,78	25,88
2,70	1,06	2,85	25,94
2,80	1,04	2,92	26,00
2,90	1,03	2,99	26,07
3,00	1,02	3,06	26,14
3,10	1,01	3,13	26,21
3,20	1,00	3,19	26,29
3,30	0,99	3,26	26,37
3,40	0,98	3,33	26,45
3,50	0,97	3,39	26,54
3,60	0,96	3,46	26,62
3,70	0,95	3,52	26,71
3,80	0,94	3,58	26,80
3,90	0,93	3,65	26,88
4,00	0,93	3,71	26,97

**2) Задача выбора оптимальных параметров емкости в форме параллелепипеда.**

Бак предполагается выполнить в форме параллелепипеда (рис. 6.1, б) со сторонами  $a \times a \times h$ . Требуется найти оптимальное решение (если оно существует), при котором расход материалов (поверхность бака) будет минимальным. Проведите исследование самостоятельно аналогично предыдущему.

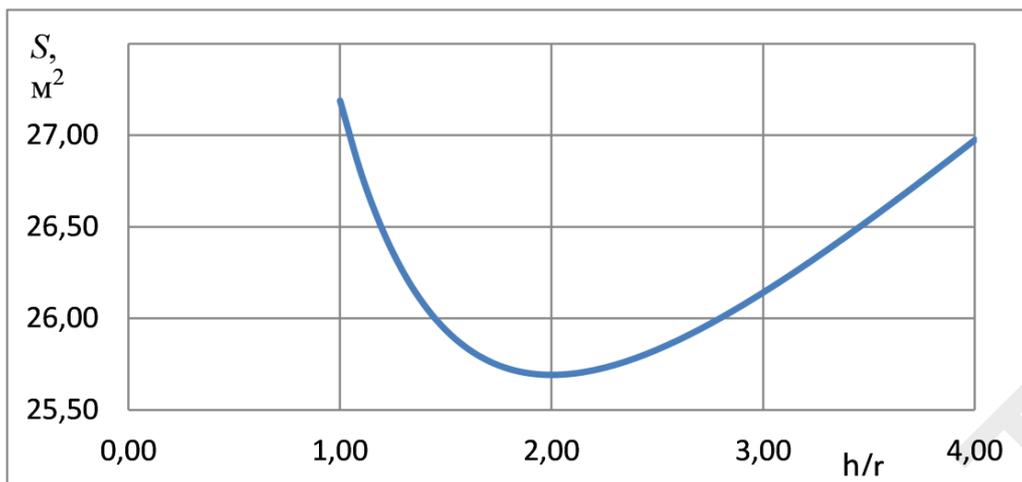


Рис. 6.2. График зависимости площади  $S$ ,  $\text{м}^2$  поверхности цилиндрического бака от отношения  $h/r$

### Содержание отчета

1. Математическая формулировка задачи оптимизации для каждого варианта выполнения ёмкости и аналитическое исследование.
2. Расчеты и график зависимости расхода материала  $S$  в функции соотношения  $k = h/r$  для первого варианта и  $k = h/a$  для второго.
3. Сравнение результатов аналитического расчета и построения графиков.
4. Оценка дополнительного расхода материала (в процентах) при использовании оптимального решения по второму варианту (бак в форме параллелепипеда) от оптимального решения по варианту 1 (цилиндрический бак).
5. Выводы по работе.

### Задание № 6.2 и пример расчетов

#### *Оптимизация режимов работы вентиляторной установки*

Рассматривается вентиляторная установка, содержащая два вентилятора, работающих на общий воздуховод.

Производительность установки необходимо регулировать. В большинстве эксплуатируемых установок такое регулирование осуществляют дискретно: включением/отключением двигателей вентиляторов.

В современных установках все большее применение получает регулирование производительности за счет управления скоростью вентиляторов с помощью частотно-регулируемых приводов (ЧРП). Такое регулирование обеспечивает существенную экономию электроэнер-

гии [1, 6]. При построении систем частотного регулирования, как правило, принимают, что характеристики отдельных вентиляторов и приводов не отличаются. Фактически индивидуальные характеристики элементов установки могут существенно отличаться.

Ставится *задача оптимизации алгоритмов управления с учетом индивидуальных* энергетических характеристик вентиляторов и электроприводов, что может дать дополнительную экономию электроэнергии.

Разработаем *математическую модель* задачи.

При номинальной скорости каждый из вентиляторов работает с производительностью  $Q_n$  и создает давление  $p_n$ .

Соответственно, полезная мощность вентиляторов  $P_{н.в}$  при номинальной скорости одинакова (она определяется как произведение давления на производительность).

Активная мощность, потребляемая из сети электроприводом каждого вентилятора, определяется выражением

$$P_c = \frac{P_{н.в}}{\eta_v \eta_{\text{эп}}},$$

где  $\eta_v$ ,  $\eta_{\text{эп}}$  – КПД вентилятора и КПД электропривода соответственно.

Значения КПД первого и второго вентиляторов и их электроприводов отличаются. Обозначим для первой вентиляторной установки общий КПД

$$\eta_1 = \eta_{v1} \eta_{\text{эп}1}.$$

Для второй установки

$$\eta_2 = \eta_{v2} \eta_{\text{эп}2}.$$

Тогда активная мощность, потребляемая из сети электроприводом первого вентилятора, составит

$$P_{c1} = \frac{P_{н.в}}{\eta_1}. \quad (6.14)$$

Для второго вентилятора

$$P_{c2} = \frac{P_{н.в.}}{\eta_2}. \quad (6.15)$$

Введем упрощение: будем считать, что в рабочем диапазоне скоростей значения КПД  $\eta_1, \eta_2$  остаются постоянными.

За критерий оптимизации примем суммарную мощность, потребляемую из сети приводами вентиляторов.

Известно [6], что мощность нагнетателей при регулировании скорости зависит от относительной скорости в третьей степени. Обозначим относительную скорость первого и второго вентиляторов:

$$\frac{n_1}{n_{ном}} = v_1; \quad \frac{n_2}{n_{ном}} = v_2.$$

Тогда зависимость потребляемой из сети приводами вентиляторов мощности от скорости с учетом (6.14), (6.15) можно представить в виде

$$P_{c1}(v_1) = \frac{P_{н.в.}}{\eta_1} v_1^3; \quad P_{c2}(v_2) = \frac{P_{н.в.}}{\eta_2} v_2^3.$$

Соответственно, для двух вентиляторных установок суммарная активная мощность, потребляемая из сети, запишется как

$$P_{\Sigma}(v_1, v_2) = \frac{P_{н.в.}}{\eta_1} v_1^3 + \frac{P_{н.в.}}{\eta_2} v_2^3. \quad (6.16)$$

**Задача оптимизации** обеспечить минимум мощности, потребляемой из сети электродвигателями вентиляторов:

$$P_{\Sigma}(v_1, v_2) \rightarrow \min.$$

Производительность вентилятора при непрерывном регулировании зависит от скорости в первой степени [6]. Общая производительность установки:

$$Q_{\Sigma}(v_1, v_2) = Q_H v_1 + Q_H v_2.$$

За счет регулирования скорости необходимо обеспечить требуемую производительность:

$$Q_{\Sigma}(v_1, v_2) = Q_{\text{тр}}, \quad 0 \leq Q_{\text{тр}} \leq 2.$$

Перепишем последнее условие в виде

$$g(v_1, v_2) = Q_{\text{н}}v_1 + Q_{\text{н}}v_2 - Q_{\text{тр}}. \quad (6.17)$$

Рассматриваемую задачу можно характеризовать как однокритериальную оптимизационную задачу с двумя управляющими воздействиями  $v_1, v_2$ .

Для ее решения используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа записывается в виде суммы критерия (6.16) и уравнения связи (6.17), умноженного на неопределенный множитель  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} L(v_1, v_2, \lambda) &= P_{\Sigma}(v_1, v_2) + \lambda g(v_1, v_2) = \\ &= P_{\Sigma}(v_1, v_2) = \frac{P_{\text{н.в}}}{\eta_1} v_1^3 + \frac{P_{\text{н.в}}}{\eta_2} v_2^3 + \lambda(Q_{\text{н}}v_1 + Q_{\text{н}}v_2 - Q_{\text{тр}}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Находим частные производные от функции Лагранжа (6.18) и приравниваем их нулю:

$$\frac{\partial L(v_1, v_2, \lambda)}{\partial v_1} = 3 \frac{P_{\text{н.в}}}{\eta_1} v_1^2 + \lambda Q_{\text{н}} = 0; \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial L(v_1, v_2, \lambda)}{\partial v_2} = 3 \frac{P_{\text{н.в}}}{\eta_2} v_2^2 + \lambda Q_{\text{н}} = 0; \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial L(v_1, v_2, \lambda)}{\partial \lambda} = Q_{\text{н}}v_1 + Q_{\text{н}}v_2 - Q_{\text{тр}} = 0. \quad (6.21)$$

Из (6.19) находим выражение для неопределенного множителя

$$\lambda = -\frac{3P_{\text{н.в}}v_1^2}{\eta_1 Q_{\text{н}}}$$

и подставляем в (6.20):

$$3 \frac{P_{н.в}}{\eta_2} v_2^2 - \frac{3P_{н.в}v_1^2}{\eta_1 Q_H} Q_H = 0, \quad \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \Rightarrow$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\eta_2/\eta_1}. \quad (6.22)$$

Подставив (6.22) для  $v_2$  в (6.21), найдем оптимальное значение скорости  $v_1$ :

$$Q_H v_1 + Q_H v_1 \sqrt{\eta_2/\eta_1} = Q_{тр}, \Rightarrow$$

$$v_{1opt} = \frac{Q_{тр}/Q_H}{1 + \sqrt{\eta_2/\eta_1}}, \quad 0 \leq v_{1opt} \leq 1. \quad (6.23)$$

Значение  $v_{2opt}$  вычисляется подстановкой  $v_{1opt}$  в выражение (6.22):

$$v_{2opt} = v_{1opt} \sqrt{\eta_2/\eta_1}. \quad (6.24)$$

Для определенности примем, что КПД первой установки больше, чем второй. Тогда из последнего выражения следует, что оптимальная скорость первого вентилятора будет больше, чем второго, то есть большую нагрузку принимает вентилятор с большим КПД.

Возможна ситуация, когда расчетное значение  $v_{1opt} > 1$ . Это означает, что при оптимальном управлении электродвигатель первого вентилятора выходит на ограничение по скорости и должен работать с номинальной скоростью. В этом случае необходимо решать задачу, приняв в выражении для функции Лагранжа (6.18)  $v_1 = 1$ .

Оптимальное значение суммарной мощности вычисляют по выражению (6.16), подставляя в него найденные значения оптимальных скоростей  $v_{1opt}$ ,  $v_{2opt}$ :

$$P_{\Sigma opt}(v_{1opt}, v_{2opt}) = \frac{P_H}{\eta_1} v_{1opt}^3 + \frac{P_H}{\eta_2} v_{2opt}^3. \quad (6.25)$$

Оценим, *насколько оптимальное решение* лучше *рационально-го*, не учитывающего индивидуальные характеристики элементов установки. В случае рационального управления скорости вентиляторов принимаются одинаковыми:  $v_1 = v_2 = v$  и рассчитываются из условия (6.17):

$$v = \frac{Q_{\text{тр}}/Q_{\text{н}}}{2}. \quad (6.26)$$

При этом суммарная мощность составит

$$P_{\Sigma}(v) = P_{\text{н.в}} v^3 \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right). \quad (6.27)$$

Экономия мощности за счет оптимизации

$$\Delta P = P_{\Sigma}(v) - P_{\Sigma \text{opt}}(v_{1\text{opt}}, v_{2\text{opt}}). \quad (6.28)$$

Для исходных данных, приведенных в табл. 6.3, рассчитать оптимальные значения скорости первого и второго вентиляторов, оптимальное значение суммарной мощности и экономию мощности за счет оптимизации.

Пример расчета.

Исходные данные для расчета:

$$P_{\text{н.в}} = 20 \text{ кВт}; \eta_1 = 0,55; \eta_2 = 0,35; \frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{н}}} = 1,7.$$

Таблица 6.3

№ варианта	$P_{\text{н.в}}$ , кВт	$\eta_1$	$\eta_2$	$\frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{н}}}$
1	15	0,50	0,30	1,6
2	25	0,55	0,30	1,5
3	30	0,55	0,30	1,7
4	40	0,60	0,40	1,6
5	45	0,65	0,40	1,6
6	20	0,60	0,30	1,5

По выражению (6.23) находим оптимальное значение скорости первого вентилятора:

$$v_{1opt} = \frac{Q_{тр}/Q_H}{1 + \sqrt{\eta_2/\eta_1}} = \frac{1,7}{1 + \sqrt{0,35/0,55}} = 0,94.$$

По формуле (6.22) определяем оптимальное значение скорости второго вентилятора;

$$v_{2opt} = v_{1opt} \sqrt{\eta_2/\eta_1} = 0,94 * \sqrt{0,35/0,55} = 0,75.$$

Суммарная мощность, потребляемая приводами вентиляторов из сети, по выражению (6.16):

$$P_{\Sigma opt}(v_{1opt}, v_{2opt}) = \frac{P_H}{\eta_1} v_{1opt}^3 + \frac{P_H}{\eta_2} v_{2opt}^3 = \frac{20}{0,55} 0,94^3 + \frac{20}{0,35} 0,75^3 = 55,3 \text{ кВт.}$$

Скорость вентиляторов при рациональном управлении по формуле (6.26):

$$v = \frac{Q_{тр}/Q_H}{2} = \frac{1,7}{2} = 0,85.$$

Мощность при рациональном управлении по выражению (6.27):

$$P_{\Sigma}(v) = P_{H.B} v^3 \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) = 20 * 0,85^3 \left( \frac{1}{0,55} + \frac{1}{0,35} \right) = 57,4 \text{ кВт.}$$

Экономия мощности за счет оптимизации управления по формуле (6.28):

$$\Delta P = P_{\Sigma}(v) - P_{\Sigma opt}(v_{1opt}, v_{2opt}) = 57,4 - 55,3 = 2,1 \text{ кВт.}$$

### ***Дополнительное задание***

Решите задачу оптимизации скорости вентиляторов для ситуации, когда отличаются не только КПД вентиляторных установок, но и мощности вентиляторов. Исходные данные для числового расчета задает преподаватель, ведущий занятия.

### **Контрольные вопросы**

1. Как определяется общий КПД вентиляторной установки?
2. В чем заключается задача оптимизации?
3. При отличающихся КПД вентиляторных установок какая из установок работает с большей нагрузкой?
4. Оцените эффективность оптимизации управления вентиляторами.

### **Содержание отчета**

1. Постановка задачи исследования и формулировка задачи оптимизации.
2. Расчет оптимальных значений скорости вентиляторов.
3. Расчет потребляемой из сети мощности при оптимальном управлении.
4. Расчет скорости вентиляторов и мощности при рациональном управлении.
5. Оценка экономии мощности при оптимальном управлении по сравнению с рациональным.
6. Выводы по работе.

## 7. ПОИСК ЭКСТРЕМУМА МЕТОДОМ ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

### Краткие теоретические сведения

Как уже отмечалось, во многих задачах критерий оптимизации является нелинейной функцией  $n$  проектных переменных  $x_i$  – *задачи с многопараметрической нелинейной моделью*. Для двух проектных переменных график функции  $y(x_1, x_2)$  может быть представлен в виде некоторой поверхности (рис. 7.1).

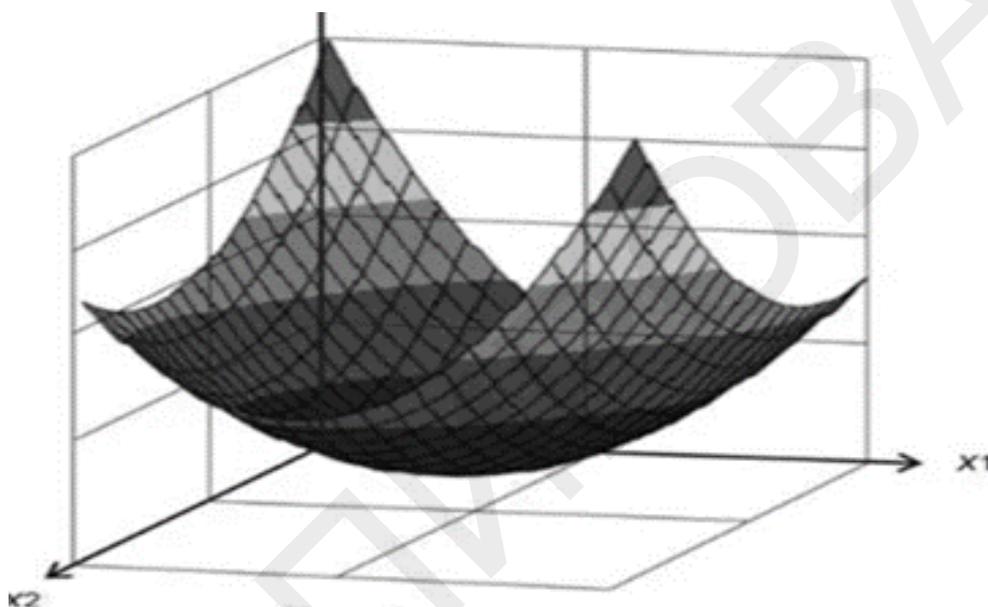


Рис. 7.1. График функции двух переменных

Аналитическое выражение для критерия оптимизации неизвестно.

В этом случае, как и в однопараметрических задачах, применяются различные методы поиска экстремума критерия оптимизации.

Для пояснения алгоритма поиска используются линии равного уровня значения функции. Линией равного уровня функции называется линия на плоскости  $x_1 O x_2$ , в точках которой функция сохраняет постоянное значение. Линии равного уровня геометрически изображаются на плоскости изменения проектных параметров в виде кривых линий. Для построения линии уровня достаточно поверхность графика функции пересечь плоскостью  $y = \text{const}$  и линию пересечения спроектировать на плоскость  $x_1 O x_2$ .

Линии равного уровня используются, например, на топографической карте и показывают уровни одинаковых высот.

На рис. 7.2 изображены линии равного уровня некоторой функции двух переменных  $y(x_1, x_2)$ . Вдоль этих линий функция сохраняет постоянные значения, равные 1, 3, 5, 7, 9.

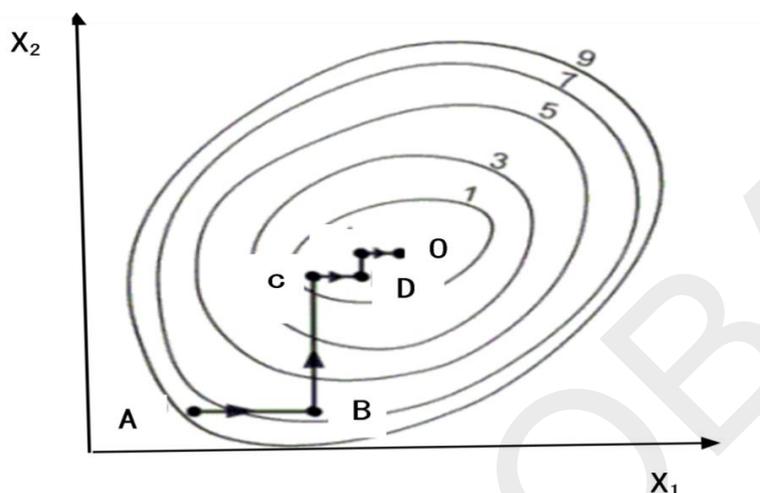


Рис. 7.2. К поиску экстремума методом покоординатного спуска

Поиск начинают с некоторой выбранной точки  $A$  (см. рис. 7.2) и ведут, например, по переменной  $x_1$  при постоянном значении  $x_2$ . Например, если поиск ведется методом перебора по шагам, то на каждом шаге в результате испытания (эксперимента) определяют значение функции. Поиск по координате  $x_1$  продолжают, пока функция убывает. Находят минимум в точке  $B$ .

Далее переходят к поиску минимума по переменной  $x_2$  при фиксированном значении  $x_1$ . Минимум достигается в точке  $C$ . Вновь переходят к поиску минимума по переменной  $x_1$ . И так далее до достижения минимума в точке  $O$ . На рис. 7.2 показана траектория  $A-B-C-D-O$  поиска наименьшего значения функции.

При этом нужно понимать, что рисунок служит только для иллюстрации метода. Когда мы приступаем к решению реальной задачи оптимизации, такого рисунка, содержащего в себе готовый ответ, у нас, конечно, нет.

Следует учитывать, что при фиксированном значении одной из переменных функция  $y(x_1, x_2)$  вырождается в функцию одной пе-

ременной, и для поиска минимума вдоль одной из осей может быть использован любой из одномерных методов, рассмотренных в предыдущих разделах. Очевидным образом идею покоординатного спуска можно применить для функций  $n$  переменных.

Теоретически данный метод эффективен в случае единственного минимума функции. Кроме того, на практике он оказывается слишком медленным. Поэтому были разработаны более сложные методы, использующие больше информации на основании уже полученных значений функции [2–4, 11, 12].

### Задание № 7.1 и пример расчетов

Проведено экспериментальное исследование объекта управления и получена его переходная характеристика – изменение выходной переменной  $h_o$  в функции времени  $t$  при ступенчатом воздействии на входе объекта. Известно, что объект – апериодическое звено второго порядка. Используя исходные данные для переходной характеристики, приведенные в табл. 7.1, проведите параметрическую идентификацию объекта с использованием метода покоординатного спуска.

Подобные задачи возникают при разработке систем автоматического управления. Поясним термин «параметрическая идентификация». Известны передаточная функция объекта и, соответственно, аналитическое выражение для его переходной характеристики. Для рассматриваемого апериодического звена она имеет вид

$$h_a(t) = \left[ 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \exp\left(-t/T_1\right) + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \exp\left(-t/T_2\right) \right], \quad (7.1)$$

где  $T_1, T_2$  – постоянные времени объекта, численные значения которых необходимо выявить.

Следует найти такие значения  $T_1, T_2$ , при которых расчетная кривая  $h_a(t)$  будет наилучшим образом согласовываться с экспериментальными данными. Иными словами, в этой задаче переменными являются  $T_1, T_2$ .

Таблица 7.1

Время	Вар. 1	Вар. 2	Вар. 3	Вар. 4	Вар. 5
$t$ , мин	$h_3(t)$	$h_3(t)$	$h_3(t)$	$h_3(t)$	$h_3(t)$
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,0	0,340	0,300	0,360	0,270	0,370
2,0	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673
3,0	0,800	0,740	0,760	0,720	0,820
4,0	0,906	0,906	0,906	0,906	0,890
5,0	0,940	0,870	0,930	0,870	0,950
6,0	0,973	0,973	0,973	0,973	0,960
7,0	0,970	0,950	0,980	0,960	0,986
8,0	0,992	0,980	0,990	0,980	0,992

За критерий качества согласования, как правило, принимают сумму квадратов отклонений  $\Sigma\Delta$  аппроксимирующих (расчетных) значений от экспериментальных:

$$\Sigma\Delta = \sum_{i=1}^n (h_э - h_а)^2,$$

где  $n$  – количество точек экспериментальной кривой,  $h_э$  – экспериментальные значения,  $h_а$  – аппроксимирующие значения.

Поясним методику решения задачи на примере. Исходные данные приведены в столбцах В, С, строках 4–12 табл. 7.2.

Будем решать задачу нахождения постоянных времени  $T_1, T_2$  как задачу по координатного поиска минимума квадратичного отклонения аппроксимирующих значений от экспериментальных:

$$\Sigma\Delta = \sum_{i=1}^n (h_э - h_а)^2 \rightarrow \min. \quad (7.2)$$

Задачу решаем в интерактивном режиме. Известно, что наибольшее ожидаемое значение постоянной времени  $T_1 = 3-3,5$  мин, а постоянной  $T_2 = 0,3-0,35$  мин. В начале поиска задаем в ячейках С1 и Е1 табл. 7.2 начальные значения  $T_1 = 3$  мин и  $T_2 = 0,35$  мин. Эти же значения задаем в ячейках G3 и H3.

Таблица 7.2

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$T_1 =$	3,0	$T_2 =$	0,35				
2						$T_1$	$T_2$	$\Sigma\Delta$
3	$t$ , мин	$h_3(t)$	$h_a(t)$	$\Delta$		3,0	0,35	0,1103
4	0,0	0,000	0,000	0,00000		2,8	0,35	0,0772
5	1,0	0,326	0,196	0,01668		2,6	0,35	0,0491
6	2,0	0,558	0,419	0,01930		2,4	0,35	0,0267
7	3,0	0,744	0,584	0,02580		2,2	0,35	0,0112
8	4,0	0,837	0,702	0,01839		<b>2,0</b>	<b>0,35</b>	<b>0,0036</b>
9	5,0	0,884	0,786	0,00951		1,8	0,35	0,0054
10	6,0	0,930	0,847	0,00696		2,0	0,35	<b>0,0036</b>
11	7,0	0,977	0,890	0,00749		2,0	0,3	0,0024
12	8,0	1	0,921	0,00619		<b>2,0</b>	<b>0,25</b>	<b>0,0020</b>
13			$\Sigma\Delta$	0,11033		2,0	0,2	0,0027

Далее в ячейках D4–D12 вычисляем по формуле (7.1)  $h_a$  в функции времени  $t$  для принятых фиксированных значений  $T_1, T_2$  (при вычислениях для постоянных  $T_1, T_2$  используем ссылки на ячейки \$C\$1 \$E\$1). В столбце E, строки 4–12, вычисляем  $\Delta = (h_3 - h_a)^2$ . В ячейке E13, в соответствии с формулой (7.2), вычисляем сумму квадратов отклонений  $\Sigma\Delta$  и заносим «вручную» полученное значение в ячейку I3 (копировать не следует – это приведет к ошибке в дальнейших расчетах).

По рассчитанным данным строим график  $h_a(t)$  для принятых начальных значений  $T_1, T_2$  (рис. 7.3). Экспериментальные данные на рис. 7.3 показаны точками. Как следует из рисунка, аналитическая кривая плохо согласуется с экспериментальными данными.

#### ***Начинаем поиск по координате $T_1$ :***

– задаем в ячейках C1 и G4 новое уменьшенное значение  $T_1 = 2,8$  мин; значение  $T_2$  оставляем прежним;

– в ячейке E13 будет вычислено новое значение  $\Sigma\Delta$ , заносим его в ячейку I4;

– сравнивая предыдущее и полученное значение  $\Sigma\Delta$ , видим, что оно уменьшилось;

– продолжаем поиск по координате  $T_1$ , последовательно уменьшая значение  $T_1$ , и сравнивая значения  $\Sigma\Delta$ ;

– если на очередном шаге значение  $\Sigma\Delta$  увеличилось (в рассматриваемом примере это происходит при  $T_1 = 1,8$  мин), возвращаемся к предыдущему значению ( $T_1 = 2,0$  мин) – задаем это значение в ячейках С1 и G4. На этом поиск по координате  $T_1$  на первом этапе заканчиваем.

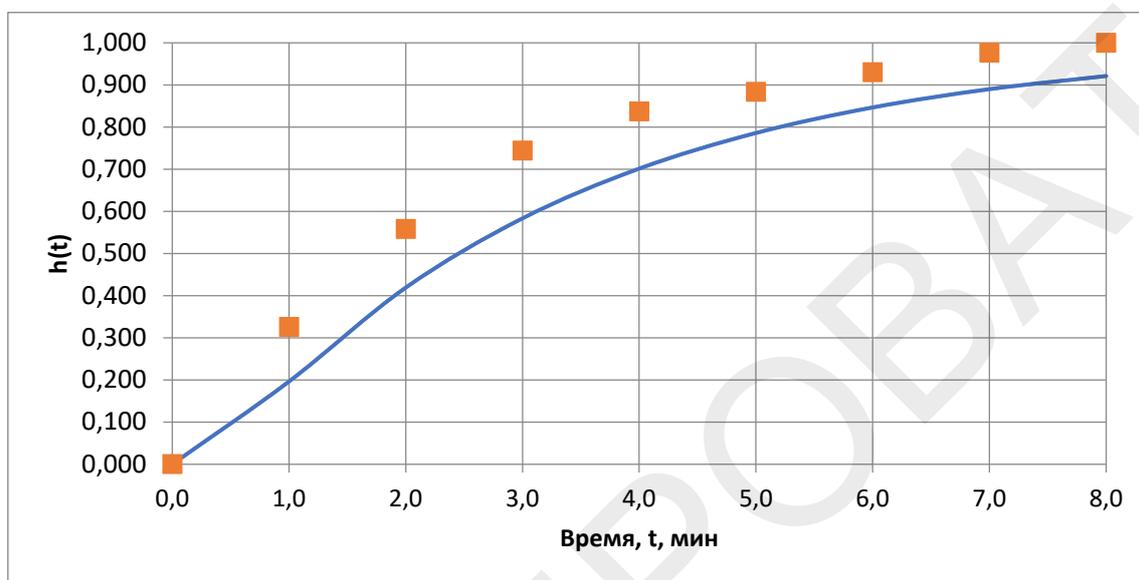


Рис. 7.3. Переходная характеристика для  $T_1 = 3,0$  мин и  $T_2 = 0,35$  мин

### ***Переходим к поиску по координате $T_2$ :***

– задаем в ячейках E3, H11 новое уменьшенное значение  $T_2 = 0,3$  мин; значение  $T_1 = 2,0$  мин оставляем неизменным;

– в ячейке E13 будет вычислено новое значение  $\Sigma\Delta$ , заносим его в ячейку I11;

– сравнивая предыдущее и полученное значения  $\Sigma\Delta$ , видим, что полученное значение уменьшилось;

– продолжаем поиск по координате  $T_2$ , последовательно уменьшая значение  $T_2$  и сравнивая значения  $\Sigma\Delta$ ;

– если на очередном шаге значение  $\Sigma\Delta$  увеличилось (в рассматриваемом примере это происходит при  $T_2 = 0,2$  мин), возвращаемся к предыдущему значению ( $T_2 = 0,25$  мин) – задаем это значение в ячейке E1. На этом поиск по координате  $T_2$  на первом этапе заканчиваем.

В рассмотренном примере после двух этапов поиска значение  $\Sigma\Delta$  оказывается достаточно малым. Поэтому поиск можно закончить. В общем случае нужно далее продолжать поиск по каждой координате.

Переходная характеристика для найденных значений постоянных построена на рис. 7.4, экспериментальные данные показаны точками.

Как следует из рисунка, аналитическая кривая достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

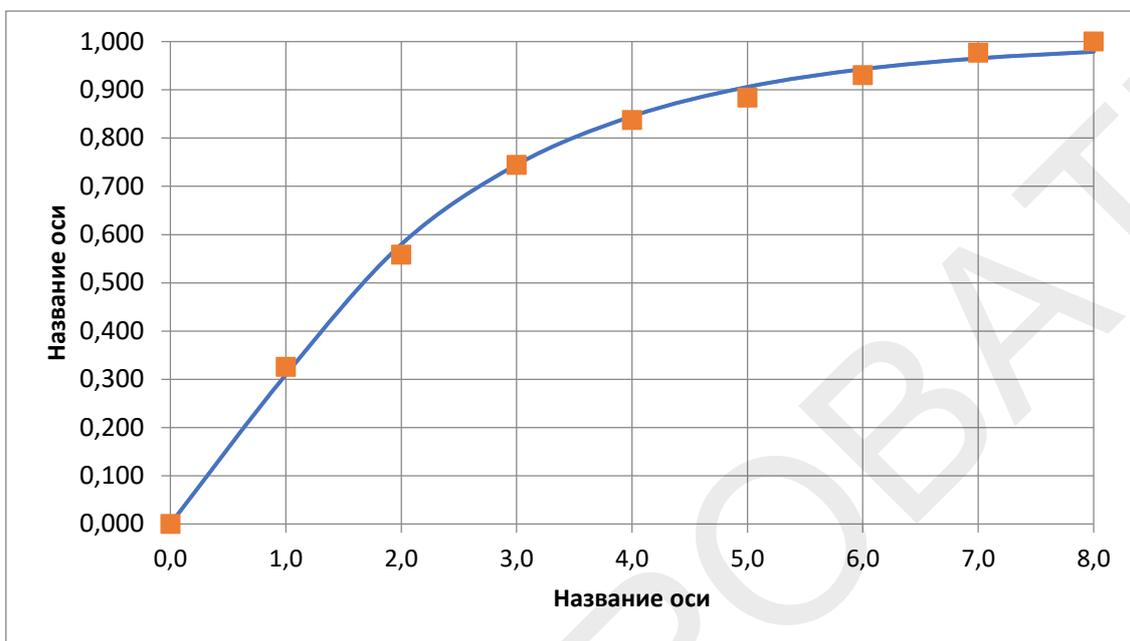


Рис. 7.4. Переходная характеристика для  $T_1 = 2,0$  мин и  $T_2 = 0,25$  мин

На рис. 7.5 дополнительно показана траектория поиска. Она построена по данным, полученным в ячейках G3–G13, H3–H13 табл. 7.2.

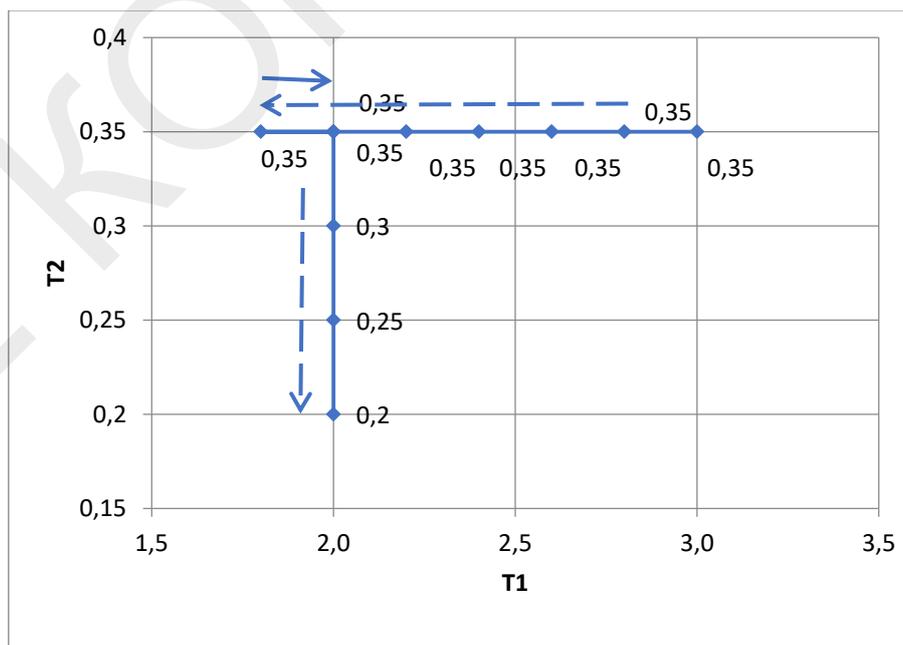


Рис. 7.5. Траектория поиска

## **Контрольные вопросы**

1. Что понимают под линиями равного уровня?
2. Поясните алгоритм поиска методом покоординатного спуска.
3. Укажите достоинства и недостатки метода покоординатного спуска.

## **Содержание отчета**

1. Постановка задачи исследования, исходные данные для исследования.
2. Методика и результаты поиска интерактивным методом.
3. График траектории поиска.
4. Выводы по работе.

## 8. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПАРЕТО

### Краткие теоретические сведения

Рассмотрим принципиальные основы теории принятия решений, когда допустимые решения оцениваются одновременно по *нескольким показателям (критериям)* [7–12].

*Многокритериальность* является неотъемлемой чертой большинства реальных задач выбора и требует специальных методов анализа. Здесь широко используется известный принцип Эджворта – Парето, согласно которому наилучшие решения следует выбирать среди парето-оптимальных решений.

#### *Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Графический метод решения*

Выявим общие элементы, присущие всякой задаче выбора. Прежде всего, должен быть задан набор допустимых решений (вариантов), из которого следует осуществлять выбор (в общем случае вариантов может быть бесконечное множество).

Обозначим варианты  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Допустимые варианты решений *образуют множество допустимых решений*

$$X = (B_1, B_2, \dots, B_n).$$

Чтобы графически проиллюстрировать подход к нахождению *парето-оптимальных решений*, будем считать, что решается задача оптимизации по двум критериям  $y_1$  и  $y_2$ . Каждому варианту решения задачи соответствуют определенные значения критериев:

- варианту  $B_1$  соответствуют значения критериев  $(y_{11}, y_{21})$ ,
- варианту  $B_2$  –  $(y_{12}, y_{22})$ ,
- варианту  $j$  –  $(y_{1j}, y_{2j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Геометрически на координатной плоскости с координатами  $y_1, y_2$  допустимые решения можно показать точками (рис. 8.1).

Для исключения заведомо неэффективных решений проводят следующие рассуждения. Считаем, что решается задача *минимизации*

*цпи*. Вариант  $B1$  является наилучшим по критерию  $y_1$  – он включается в множество парето-оптимальных (эффективных) решений. Вариант  $B4$  является наилучшим по критерию  $y_2$  – он также включается в множество парето-оптимальных решений. Однако этим множество парето-оптимальных решений не ограничивается. К нему нужно также отнести варианты  $B2, B3$ . Действительно, например, в варианте  $B2$  по сравнению с  $B1$  значение критерия  $y_2$  меньше, а  $y_1$  больше, т. е. эти варианты несравнимы.

При использовании графической иллюстрации для исключения *неэффективных* вариантов в задаче минимизации можно использовать следующее правило: все точки, лежащие к «северо-востоку» (на рис. 8.1 эти области выделены пунктирными линиями) от точки парето-оптимального решения, соответствуют неэффективным решениям.

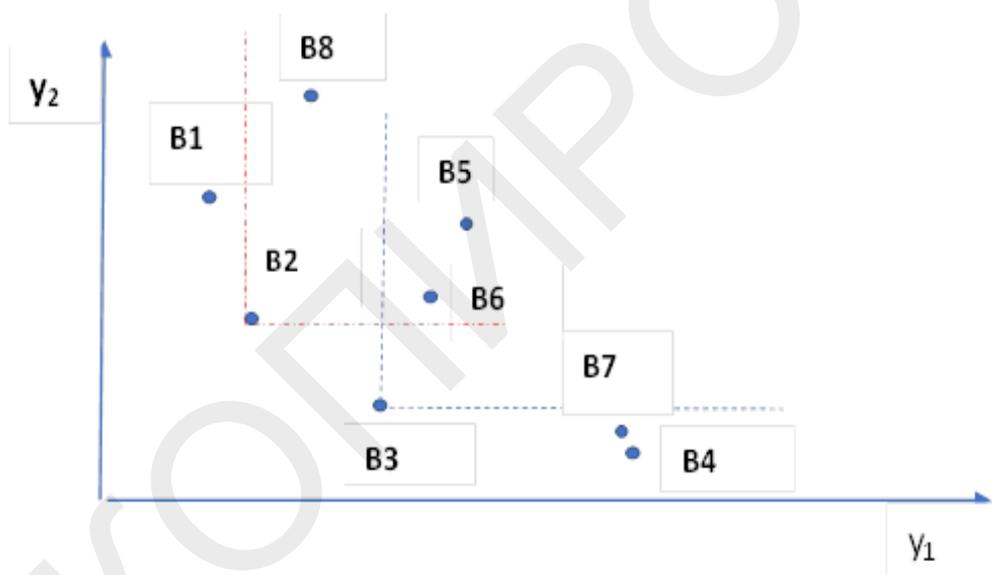


Рис. 8.1. Пример определения множества Парето

Выбрав в качестве парето-оптимального решения вариант  $B3$ , можно исключить из дальнейшего рассмотрения варианты  $B5$ – $B7$ . Далее, рассматривая вариант  $B2$  или  $B3$ , можно дополнительно отсечь как неэффективный вариант  $B8$  и т. д.

Отсюда ясно, что из множества возможных точек на роль парето-оптимальных могут претендовать лишь те, которые располагаются в ее «юго-западной» части. Аналогичное правило используется и при большем числе критериев.

Таким образом, к парето-оптимальным решениям относят каждое из решений, которое нельзя улучшить сразу по всем критериям (в рассматриваемом случае двум).

Такой подход, как правило, *не позволяет найти единственное оптимальное решение*, поскольку здесь используется иное понятие оптимальности. Кроме того, нужно отметить, что при большом количестве критериев и вариантов объем вычислений резко возрастает.

### *Понятие парето-оптимальных решений в математических терминах*

Обозначим множество возможных решений

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Минимальное число элементов этого множества – два (для того чтобы действительно был выбор). Ограничений сверху на количество возможных решений нет, оно может быть как конечным, так и бесконечным.

Отметим особенности многокритериальных задач, рассмотрев задачу выбора наилучшего проектного решения. В этой задаче множество  $X$  состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить стоимость реализации проекта  $y_1$  и величина прибыли  $y_2$ , которую обеспечит данное проектное решение (т. е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указан-

ным следует добавить еще один – третий критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия, и т. д.

Указанные выше числовые функции  $y_1, y_2, \dots, y_m$  образуют векторный критерий

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

который принимает некоторые значения в пространстве  $m$ -мерных векторов  $R^m$  ( $R^m$  – евклидово пространство  $m$ -мерных векторов с вещественными компонентами).

Это пространство называют **критериальным пространством**, или **пространством оценок**. В рассмотренном выше примере  $m = 2$  и пространство вырождается в **критериальную плоскость**.

**Задача многокритериальной оптимизации** (минимизации) заключается в выборе среди допустимых решений решения (варианта), обеспечивающего

$$\min (y_1(x), \dots, y_m(x)).$$

Допустимое решение **называется эффективным по Парето** (обозначим его  $x^*$ ) или парето-оптимальным, если не существует другого решения  $x$  такого, что для каждого из критериев выполняется условие

$$y_i(x) \leq y_i(x^*), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и хотя бы для одного критерия,

$$y_i(x) < y_i(x^*).$$

То есть решение является парето-оптимальным, если среди множества допустимых решений **не существует другого решения**, для которого **каждый из критериев** не меньше, чем в парето-оптимальном, а один из критериев другого решения строго **меньше**.

### Контрольные вопросы

1. Поясните особенности задачи многокритериальной оптимизации.
2. Какое решение называют парето-оптимальным?

### **Задание № 8.1**

Самостоятельно сформулируйте какую-либо задачу многокритериальной оптимизации с двумя критериями. Например, выбор варианта перемещения от места жительства до места работы или до университета, здесь критериями могут быть время и стоимость. Найдите парето-оптимальные решения сформулированной задачи, приведите графическую иллюстрацию.

#### **Содержание отчета**

1. Постановка задачи исследования.
2. Математическая формулировка задачи.
3. Варианты допустимых решений.
4. Графическая иллюстрация.
5. Результаты и выводы.

## 9. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. СВЕРТКА КРИТЕРИЕВ

### Краткие теоретические сведения

Свертка критериев позволяет перейти от задачи многокритериальной оптимизации к однокритериальной, методы решения которой хорошо отработаны.

Свертка критериев заключается в замене нескольких локальных (частных) критериев (будем обозначать их в этой задаче  $j_i$ ) одним обобщенным (глобальным). При наиболее часто используемой линейной (аддитивной) свертке глобальный критерий оптимизации задается в виде

$$J = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \dots + \alpha_n j_n. \quad (9.1)$$

Здесь  $n$  – число критериев,  $\alpha_i$  – весовые коэффициенты, характеризующие важность (значимость) соответствующего критерия. Чем большее значение мы придаем критерию  $j_k$ , тем больший вклад в сумму (9.1) он должен давать и, следовательно, тем большее значение  $\alpha_k$  должно быть выбрано.

Значение весовых коэффициентов назначают эксперты так, чтобы сумма  $\alpha_i$  была равна единице. Как это делается, рассмотрим далее в примере 9.2.

В некоторых случаях значения критериев оптимизации имеют *количественную оценку*.

**Пример 9.1.** Имеется несколько альтернативных проектов асинхронных двигателей (АД) одинаковой мощности и частоты вращения. Требуется выбрать оптимальный.

Естественно в качестве локальных критериев рассматривать: КПД –  $j_1 = \eta$ , коэффициент мощности –  $j_2 = \cos\varphi$ , массу АД –  $j_3 = m$ , стоимость двигателя –  $j_4 = C$ . Первые два критерия подлежат максимизации, а два последних – минимизации. Чтобы свести задачу к максимизации, можно последние два критерия принять в виде:  $1/m$ ,  $1/C$ , тогда глобальный критерий нужно стремиться максимизировать.

Кроме того, численные значения первых двух критериев могут существенно отличаться от двух последних. Чтобы избежать сложностей с последующим выбором весовых коэффициентов, каждый критерий следует *нормировать* (выразить в относительных единицах). Например, так: выбрать какой-либо выпускаемый промышленностью АД в качестве стандартного (эталонного) и определить нормированное значение каждого локального критерия в виде

$$j_i^* = \frac{J_i}{J_{\text{ст}}},$$

где  $J_{\text{ст}}$  – значение соответствующего критерия для стандартного двигателя.

Так, для первого критерия получим:

$$j_1^* = \frac{\eta_{\text{НОМ}}}{\eta_{\text{НОМ.СТ}}}$$

Для второго критерия:

$$j_2^* = \frac{\cos\varphi_{\text{НОМ}}}{\cos\varphi_{\text{НОМ.СТ}}}$$

и т. д.

Очевидно, что если для спроектированного двигателя соответствующий критерий больше единицы, то спроектированный по этому критерию двигатель лучше стандартного, если меньше – то хуже. Далее рассчитываются значения обобщенного критерия для каждого рассматриваемого варианта и находится оптимальный вариант.

**Пример 9.2.** Для многих задач многокритериальной оптимизации значениям критериев можно дать только *вербальную (словесную) оценку*. В этом случае вербальные оценки переводят в количественные с использованием различных шкал.

Поясним упрощенную методику решения таких задач многокритериальной оптимизации при малом числе критериев и альтернатив на конкретном примере.

Рассматривается задача выбора выпускником вуза будущего места работы.

Анализируются следующие варианты:

*B1* – остаться в университете преподавателем;

*B2* – работать в фирме, связанной с нефтегазовым комплексом;

*B3* – работать в частном предприятии.

Для последующего сравнения альтернативных вариантов используем частные (локальные) критерии:

$j_1$  – заработная плата;

$j_2$  – перспективы карьерного роста;

$j_3$  – режим работы.

На *первом этапе* необходимо оценить значимость (важность, вес) локальных критериев. Обозначим коэффициенты, характеризующие значимость отдельных критериев  $\alpha_i$ . Для нахождения этих коэффициентов используются экспертные оценки. Введем для оценки шкалу от 1 до 5. Значению 5 соответствует, например, словесная формулировка – «очень важный», значению 1 – «не слишком важный». Соответственно, 2, 3, 4 – промежуточные оценки.

В качестве примера в табл. 9.1 (вторая строка) приведены оценки одного из экспертов. В последнем столбце найдена сумма оценок локальных критериев.

Таблица 9.1

$\alpha_i$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\Sigma\alpha_i$
Оценки	5	4	3	12
$\alpha_i^*$	0,42	0,33	0,25	1

Далее найдено относительное значение  $\alpha_i^*$  каждого весового коэффициента (третья строка таблицы) по выражению

$$\alpha_i^* = \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i}.$$

В результате сумма относительных значений весовых коэффициентов равна единице, что упрощает последующий анализ.

На *втором этапе* решения задачи проводится оценка эффективности (желательности) каждого варианта решения по каждому критерию. Для перевода словесных оценок в количественные используем

ту же пятибалльную шкалу. Оценке 5 на этом этапе соответствует характеристика – «по рассматриваемому критерию вариант оценивается очень высоко»; оценка 1 – «по рассматриваемому критерию вариант оценивается низко». Соответственно 2, 3, 4 – промежуточные оценки. Пример оценки значений критериев для каждого варианта приведен в табл. 9.2 (оценки условные, даны для наглядности). Дополнительно поясним, что, например, оценка 3 во второй строке второго столбца означает, что по критерию  $j_1$  (заработная плата) вариант  $B1$  (работа в университете) признан экспертом «удовлетворительным».

Таблица 9.2

Критерий	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$J_{Bi}$
$B1$	3	4	5	3,83
$B2$	5	4	3	4,17
$B3$	4	4	5	4,25

**На третьем этапе** вычисляются значения обобщенного (глобального критерия)  $J_{Bi}$  для каждого варианта. Для этого оценки  $j_i$  каждого варианта по локальным критериям умножаются на значения соответствующих весовых коэффициентов  $\alpha_i^*$  и находится сумма произведений:

$$J_{Bi} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* j_{iBi}$$

$$J_{B1} = \alpha_1^* j_{1B1} + \alpha_2^* j_{2B1} + \alpha_3^* j_{3B1} = 0,42 * 3 + 0,33 * 4 + 0,25 * 5 = 3,83;$$

$$J_{B2} = \alpha_1^* j_{1B2} + \alpha_2^* j_{2B2} + \alpha_3^* j_{3B2} = 0,42 * 5 + 0,33 * 4 + 0,25 * 3 = 4,17;$$

$$J_{B3} = \alpha_1^* j_{1B3} + \alpha_2^* j_{2B3} + \alpha_3^* j_{3B3} = 0,42 * 4 + 0,33 * 4 + 0,25 * 5 = 4,25.$$

Вычисленные значения  $J_{Bi}$  приведены в последнем столбце табл. 9.2. Как следует из полученных результатов, оптимальным является вариант 3, для которого  $J_{B3} = 4,25$ ; незначительно уступает ему вариант 2:  $J_{B2} = 4,17$ .

Разработаны и другие, более строго математически обоснованные методики формирования свертки критериев. В частности, метод анализа иерархий Т. Саати [10].

### **Контрольные вопросы**

1. Что понимают под линейной сверткой критериев?
2. Как выбираются весовые коэффициенты?
3. Как рассчитывается значение глобального критерия?

### **Задание № 9.1**

Решите поставленную в примере 9.2 задачу, увеличив число альтернативных вариантов и число локальных критериев минимум до 5. При этом выступите в роли экспертов и дайте свои оценки веса локальных критериев и альтернативных вариантов.

Или сформулируете и решите другую аналогичную задачу.

### **Содержание отчета**

1. Постановка задачи исследования.
2. Методика решения задачи.
3. Расчетные таблицы.
4. Результаты и выводы.





Пусть  $M$  – многоугольник решений системы ограничений (см. рис. 10.2). При изменении  $d$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  прямая  $c_1x_1+c_2x_2=d$  при некотором значении  $d=d_1$  достигает многоугольника  $M$  и имеет с ним общую точку  $A$  (назовем эту точку точкой «входа»), а затем, пройдя весь многоугольник  $M$ , при некотором значении  $d=d_2$  будет иметь с ним последнюю общую точку  $B$  (назовем ее точкой «выхода»).

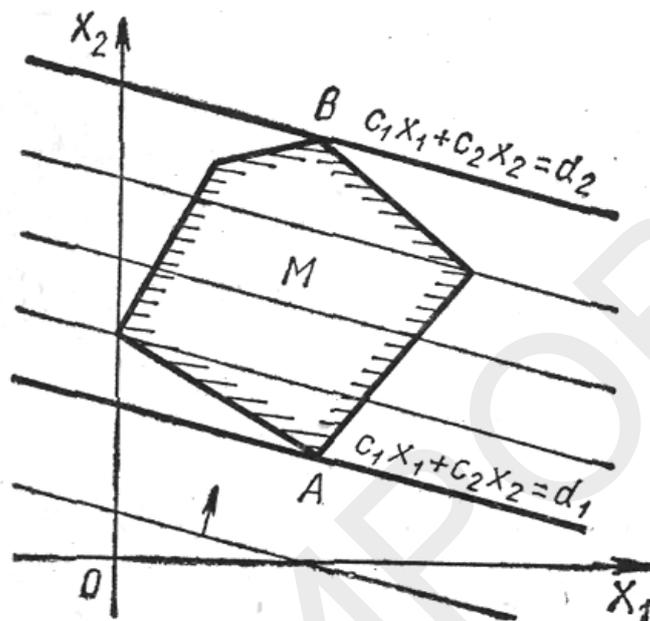


Рис. 10.2. Область допустимых решений и целевая функция

Своего наименьшего значения целевая функция достигает в точке «входа»  $A$  и наибольшего значения – в точке «выхода»  $B$ .

Возможен случай, когда при перемещении прямой постоянного значения целевой функции «вход» в многоугольник решений  $M$  или «выход» из него произойдет по стороне этого многоугольника (рис. 10.3). Это случится, если в многоугольнике  $M$  есть стороны, параллельные прямой  $c_1x_1+c_2x_2=d$ . В этом случае точек «входа» («выхода») бесчисленное множество и, следовательно, минимальное (максимальное) значение целевая функция принимает во всех точках этой стороны многоугольника.

Таким образом в этом случае координаты всех точек отрезка  $AD$  (рис. 10.3, а) минимизируют значение функции  $z=c_1x_1+c_2x_2$ , а координаты всех точек отрезка  $AB$  (рис. 10.3, б) максимизируют значение целевой функции.

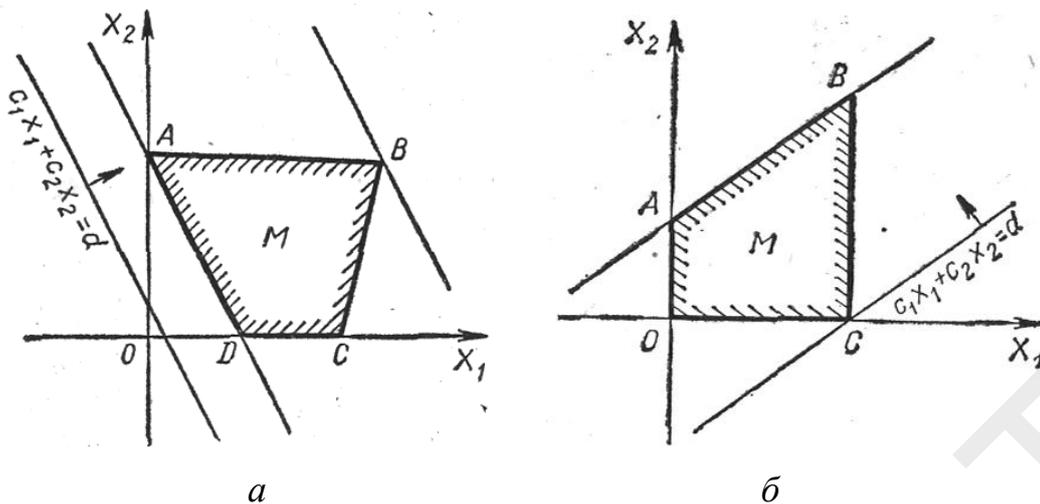


Рис. 10.3. Иллюстрация множества оптимальных решений:  
*a* – в задаче минимизации, *б* – в задаче максимизации

В случае открытых областей решений прямая  $c_1x_1 + c_2x_2 = d$  при изменении  $d$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  не имеет точки «выхода» из области решений (рис. 10.4). Тогда максимальное значение функции не достигается.

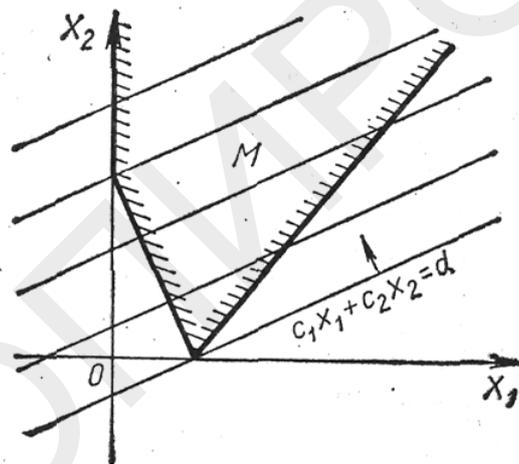


Рис. 10.4. Иллюстрация открытой области решений

Учитывая, что оптимальное значение целевая функция принимает в точках «входа» и «выхода», то есть в вершинах области решений, можно предложить следующий план графического решения задачи линейного программирования. На основе уравнений ограничений построить область допустимых решений, построить прямую, соответствующую целевой функции, и параллельным переносом этой прямой найти точку «входа» или «выхода» (в зависимости от требования задачи), определить координаты этой точки и вычислить в них значение целевой функции.

Рассмотренный метод графического решения удобен для пояснения смысла и методики решения задач линейного программирования.

На практике, особенно при большом количестве проектных параметров, для решения следует использовать встроенную в XL программу **Поиск**. Функция перебором данных выбирает оптимальное значение из возможных. В большинстве случаев эта функция по умолчанию отключена. Для ее добавления в меню воспользуйтесь подсказкой в Справке: Microsoft Excel (F1), по запросу (Как включить функцию «Поиск решения»).

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу линейного программирования.
2. Что понимают под областью допустимых решений? Приведите графическую иллюстрацию для случая двух переменных.
3. В каких точках области допустимых решений может находиться оптимальное решение?
4. Поясните графический метод решения задачи.

### Задание № 10.1 и пример расчетов

Заданы уравнения ограничений и целевая функция. Найти максимальное и минимальное значения целевой функции.

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

№ вар.	Уравнения ограничений и целевая функция	№ вар.	Уравнения ограничений и целевая функция
1	$2x_2 \geq 3; 8x_1 + 2x_2 \leq 80;$ $18x_1 - 5x_2 \geq 70; z(x) = 7x_1 - x_2$	2	$2x_2 \leq 11; 5x_1 - x_2 \leq 51;$ $10x_1 + 4x_2 \geq 69; z(x) = 11x_1 + 7x_2$
3	$11x_1 - 17x_2 \leq 66; -x_1 + 11x_2 \leq 14;$ $5x_1 - 3x_2 \geq 14; z(x) = 12x_1 - 2x_2$	4	$x_1 - 9x_2 \leq 18; 2x_1 + 4x_2 \leq 3;$ $3x_1 - x_2 \geq -8; z(x) = 5x_1 + x_2$
5	$9x_1 + 11x_2 \geq 48; 5x_1 - x_2 \leq 44;$ $-x_1 - 13x_2 \leq 6; z(x) = 6x_1 + 5x_2$	6	$2x_2 \geq -11; 4x_1 + x_2 \leq 45; x_1 \geq 0;$ $4x_1 - 3x_2 \geq 30; z(x) = 9x_1 + 5x_2$
7	$2x_1 + 4x_2 \geq 5; 5x_1 - x_2 \leq 46; x_1 \geq 0;$ $3x_1 - 5x_2 \geq 15; z(x) = 6x_1 - 7x_2$	8	$x_1 + 11x_2 \geq 11; 3x_1 - x_2 \leq 28;$ $5x_1 - 13x_2 \geq 11; z(x) = 8x_1 + 3x_2$
9	$8x_1 + 14x_2 \geq 14; 13x_1 + 5x_2 \leq 100;$ $5x_1 - 9x_2 \geq 5; z(x) = 11x_1 + 7x_2$	10	$x_1 + 3x_2 \geq 2; 4x_1 - 2x_2 \leq 35; x_1 \geq 0;$ $5x_1 - 13x_2 \geq 18; z(x) = 7x_1 + x_2$

**Пример 10.1.** Найти максимальное значение целевой функции:

$$z = x_1 + 0,5x_2 \quad (10.5)$$

при условии, что переменные  $x_1$  и  $x_2$  подчинены системе:

$$4x_1 + x_2 \leq 1; \quad (10.6)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1; \quad (10.7)$$

$$5x_1 - x_2 \leq 0,8; \quad (10.8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (10.9)$$

В первую очередь найдем область допустимых решений. Для построения области решений необходимо, используя уравнения ограничений, записать  $x_2$  как функцию переменной  $x_1$ , приняв в уравнениях (10.6)–(10.9) знак равенства. После преобразований уравнений система будет выглядеть следующим образом:

$$x_{21} = 1 - 4x_1; \quad (10.10)$$

$$x_{22} = \frac{1 - x_1}{2}; \quad (10.11)$$

$$x_{23} = 5x_1 - 0,8. \quad (10.12)$$

В программе Excel задаем переменную  $x_1$  с шагом, например 0,1, и рассчитываем соответствующие значения  $x_{21}, x_{22}, x_{23}$ . Результаты вычислений для рассматриваемого примера приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2

$x_1$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{2z}$
0	1	0,5	-0,8	0,40
0,1	0,6	0,45	-0,3	0,20
0,2	0,2	0,4	0,2	0,00
0,3	-0,2	0,35	0,7	-0,20
0,4	-0,6	0,3	1,2	-0,40
0,5	-1	0,25	1,7	-0,60
0,6	-1,4	0,2	2,2	-0,80
0,7	-1,8	0,15	2,7	-1,00
0,8	-2,2	0,1	3,2	-1,20
0,9	-2,6	0,05	3,7	-1,40
1	-3	0	4,2	-1,60

Для вычисления точек постоянного значения целевой функции задаем произвольное значение целевой функции, например  $z = 0,2$ , преобразуем выражение (10.5) к виду

$$x_{2z} = \frac{0,2 - x_1}{0,5}.$$

Проводим соответствующие вычисления и строим графики (рис. 10.5).

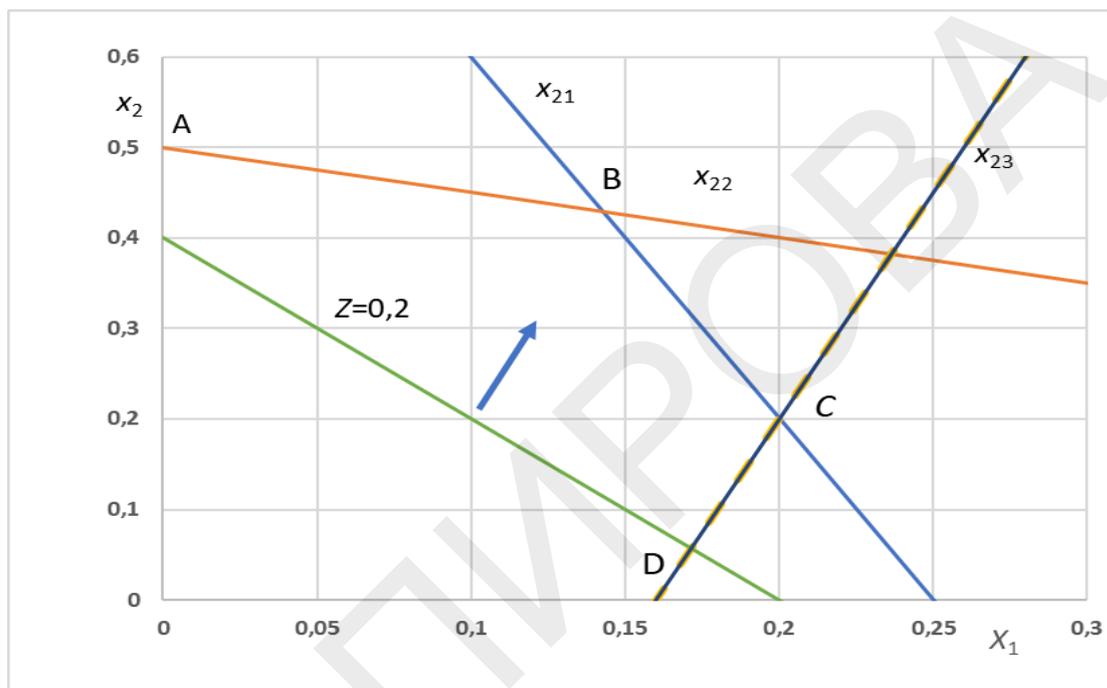


Рис. 10.5. К решению задачи оптимизации

Область допустимых решений ограничена многоугольником  $ABCD$ . Направление движения линии постоянного значения целевой функции показано стрелкой. Точка «выхода» – точка  $B$ . В этой точке пересекаются прямые, соответствующие уравнениям (10.6) и (10.7). Из совместного решения этих уравнений находим оптимальные значения переменных:

$$x_{1\text{опт}} = 0,143; x_{2\text{опт}} = 0,428.$$

Подставив эти значения в выражение для целевой функции, найдем ее максимальное (оптимальное) значение  $z_{\text{опт}} = 0,357$ . Сопоставим найденные значения с полученными на графике.

## Содержание отчета

1. Постановка задачи исследования. Исходные данные для расчета.
2. Расчетные формулы и расчеты для построения области допустимых решений и постоянных значений целевой функции.
3. Графики области допустимых решений и постоянных значений целевой функции.
4. Результаты решения задачи оптимизации.

### Задание № 10.2 и пример расчетов

Предприятие выпускает два вида трансформаторов: TV1 и TV2. Запасы меди и стали для производства ограничены. На производство одного трансформатора разных типов требуется различное количество меди и стали. Прибыль от производства одного трансформатора TV1 и TV2 различна. Требуется разработать план производства, обеспечивающий максимум прибыли, то есть найти оптимальные значения количества трансформаторов первого и второго типа  $x_{1\text{опт}}$ ,  $x_{2\text{опт}}$ . Исходные данные для расчетов приведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

№ вар.	Тип тр-ра	Расход меди на один тр-р, кг	Расход стали на один тр-р, кг	Запас меди, кг	Запас стали, кг	Прибыль от единицы продукции, о.е.
1	TV1	4	10	800	1600	20
	TV2	8	4			10
2	TV1	4	10	800	1600	10
	TV2	8	4			5
3	TV1	4	10	800	1600	10
	TV2	8	4			20
4	TV1	8	4	800	800	20
	TV2	4	10			15
5	TV1	8	4	800	800	40
	TV2	4	10			20
6	TV1	4	10	800	800	10
	TV2	8	4			10

№ вар.	Тип тр-ра	Расход меди на один тр-р, кг	Расход стали на один тр-р, кг	Запас меди, кг	Запас стали, кг	Прибыль от единицы продукции, о.е.
7	TV1	2	5	1000	800	20
	TV2	4	2			10
8	TV1	2	5	1000	600	20
	TV2	4	2			10
9	TV1	2	5	1000	600	10
	TV2	4	2			5
10	TV1	2	5	1000	600	40
	TV2	4	2			30

**Пример 10.2.** Рассмотрим решение задачи для исходных данных, приведенных в табл. 10.4.

Таблица 10.4

Тип трансформатора	Количество трансформаторов	Расход меди на один тр-р, кг	Расход стали на один тр-р, кг	Запас меди, кг	Запас стали, кг	Прибыль от единицы продукции, о.е.
TV1	$x_1$	4	10	800	1600	20
TV2	$x_2$	8	4			15

### **Математическая формулировка задачи**

Пусть  $x_1, x_2$  – число единиц изделий TV1, TV2. Тогда целевая функция задачи:

$$z = 20x_1 + 15x_2 \rightarrow \max. \quad (10.13)$$

Запишем уравнения, учитывающие ограничения по запасам меди и стали:

– ограничение по меди

$$4x_1 + 8x_2 \leq 800; \quad (10.14)$$

– ограничение по стали

$$10x_1 + 4x_2 \leq 1600; \quad (10.15)$$

Переменные должны иметь неотрицательные значения:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для построения графиков линий ограничений и определения области допустимых решений примем в уравнениях (10.14), (10.15) знак равенства и приведем их к виду

$$x_{21} = \frac{800 - 4 \cdot x_1}{8};$$
$$x_{22} = \frac{1600 - 10 \cdot x_1}{4}.$$

Зададим интервал значений  $x_1 = (0;200)$ . Результаты расчетов значений  $x_{21}$ ,  $x_{22}$  в Excel приведены в табл. 10.5.

По полученным данным на рис. 10.6 построены прямые  $x_{21}$ ,  $x_{22}$ , ограничивающие область допустимых решений.

Таблица 10.5

$x_1$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{2z}$
0	100	400	200
10	95	375	187
20	90	350	173
30	85	325	160
40	80	300	147
50	75	275	133
60	70	250	120
70	65	225	107
80	60	200	93
90	55	175	80
100	50	150	67
110	45	125	53
120	40	100	40
130	35	75	27

$x_1$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{2z}$
140	30	50	13
150	25	25	0
160	20	0	-13
170	15	-25	-27
180	10	-50	-40
190	5	-75	-53
200	0	-100	-67

Затем построим линию равных значений целевой функции и найдем точку многоугольника, соответствующую максимуму целевой функции. Для этого задаем произвольно значение целевой функции  $z = 300$  и преобразуем выражение для целевой функции к виду:

$$x_{2z} = \frac{300 - 20 \cdot x_1}{15}.$$

Результаты расчетов  $x_{2z}$  приведены в последнем столбце табл. 10.5. Линия постоянного значения целевой функции при возрастании значений  $z$  будет перемещаться вверх вправо и достигнет максимального значения в точке А на границе области допустимых решений. Эта точка соответствует оптимальному решению:  $x_{1\text{опт}} = 150$  и  $x_{2\text{опт}} = 25$  (см. рис. 10.6). Следовательно, для обеспечения максимальной прибыли необходимо (оптимально) изготавливать 150 трансформаторов первого типа и 25 – второго типа.

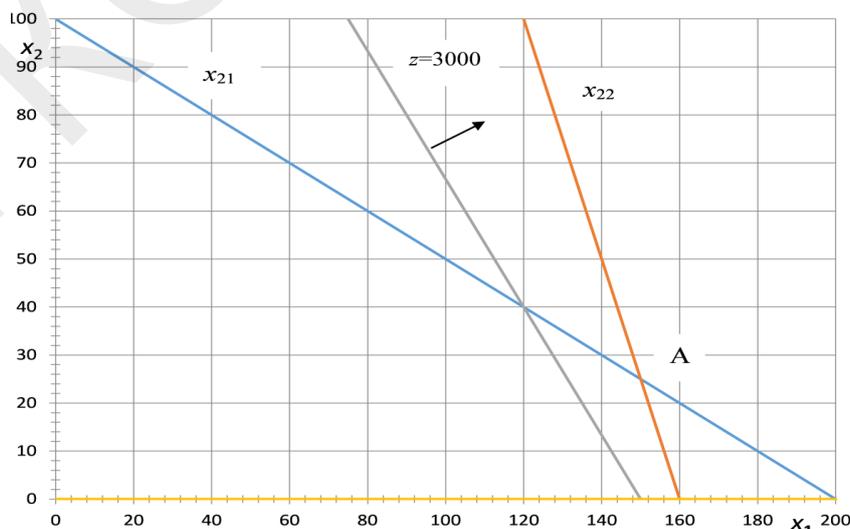


Рис. 10.6. Иллюстрация к графическому методу решения

Как следует из рис. 10.6, точка А оптимального решения определяется пересечением прямых, заданных уравнениями (10.14) и (10.15), в которых принят знак равенства:

$$\begin{aligned}4x_1 + 8x_2 &= 800; \\10x_1 + 4x_2 &= 1600.\end{aligned}$$

Соответственно, координаты точки пересечения – оптимальные значения  $x_{1\text{опт}}$  и  $x_{2\text{опт}}$  можно найти аналитически, решив приведенную систему уравнений. Прodelайте это самостоятельно и убедитесь, что результаты аналитического и графического решений совпадают.

Подставив найденные значения  $x_{1\text{опт}}$  и  $x_{2\text{опт}}$  в выражение для целевой функции, найдем значение прибыли для оптимального плана:

$$z_{\text{опт}} = 20x_{1\text{опт}} + 15x_{2\text{опт}} = 20 * 150 + 15 * 25 = 3375 \text{ о. е.}$$

Чтобы оценить эффективность оптимизации, сравним оптимальный план с планом выпуска трансформаторов только первого или только второго типа.

Предположим, планируется выпускать трансформаторы только первого типа ( $x_2 = 0$ ). В этом случае ограничение по запасам меди (10.14) принимает вид

$$4x_1 \leq 800; \Rightarrow x_1 \leq 200,$$

а ограничение по запасам стали (10.15) –

$$10x_1 \leq 1600; \Rightarrow x_1 \leq 160.$$

С учетом наиболее «жесткого» ограничения принимаем  $x_1 = 160$ . Прибыль от выпуска 160 трансформаторов первого типа составит:

$$z_1 = 20x_1 = 160 * 20 = 3200 \text{ о. е.}$$

Потери прибыли:

$$z_{\text{опт}} - z_1 = 3375 - 3200 = 175 \text{ о. е.}$$

Если принять план выпуска трансформаторов только второго типа ( $x_1 = 0$ ), то ограничения по запасам меди (10.14) и стали (10.15) принимают вид:

$$8x_2 \leq 800; \Rightarrow x_2 \leq 100;$$

$$4x_2 \leq 1600; \Rightarrow x_2 \leq 400.$$

Исходя из наиболее «жесткого» ограничения принимаем  $x_2 = 100$  и определяем прибыль от выпуска трансформаторов только второго типа:

$$z_2 = 15x_2 = 15 * 100 = 1500 \text{ о. е.}$$

Потери прибыли:

$$z_{\text{опт}} - z_2 = 3375 - 1500 = 1875 \text{ о. е.}$$

Выводы сформулируйте самостоятельно.

### Содержание отчета

1. Постановка задачи исследования. Исходные данные для расчетов.
2. Математическая формулировка задачи.
3. Графики и таблицы расчета для построения области допустимых решений и постоянного значения целевой функции.
4. Определение оптимальных значений  $x_{1\text{опт}}$ ,  $x_{2\text{опт}}$  графическим и аналитическим методом, расчет максимального значения прибыли.
5. Сравнение оптимального решения с решением выпускать трансформаторы только одного типа.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены некоторые типовые методы принятия решений, используемые в задачах проектирования и управления техническими объектами.

Даны основные понятия и определения, применяемые при постановке и решении задач статической оптимизации. На примерах показано, что в прикладных задачах, как правило, существует множество допустимых вариантов решения и проблема заключается в выборе некоторого наилучшего решения. Поясняется методика содержательной постановки задачи оптимизации, разработки математической модели объекта исследования, выбора соответствующего метода решения, оценки эффективности полученного решения.

Материалы учебного пособия призваны помочь студентам сформировать навыки самостоятельной постановки и решения задач принятия технических решений, в частности при проектировании электроустановок.

Изложенные в пособии сведения, естественно, не могут претендовать на полный анализ методов принятия решений. Дополнительные сведения по рассматриваемой проблеме можно получить в литературных источниках, в том числе, приведенных в библиографическом списке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
2. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 256 с.
3. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях: учеб.-метод. пособие. – СПб.: ЮТАС, 2007. – 104 с. – ISBN 978-5-91185-018-4.
4. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
5. Чернолуцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 416 с.
6. Костин В.И. Оптимизационные задачи электроэнергетики: учеб. пособие. – СПб.: СЗТУ, 2003. – 120 с.
7. Волков В.А. Элементы линейного программирования. – М.: Просвещение, 1975. – 142 с.
8. Струченков В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009. – 120 с.
9. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование: учеб. пособие. – 3-е изд., испр. – М.: Факториал-Пресс, 2008. – 347 с.
10. Полуниин И.Ф. Курс математического программирования: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2008. – 464 с.
11. Ильинский Н.Ф., Москаленко В.В. Электропривод: энерго- и ресурсосбережение: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 208 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	5
1. Основные понятия и определения.....	7
2. Нахождение экстремума функции одной переменной классическим методом ...	12
3. Поиск экстремума функции одной переменной методом сканирования .....	20
4. Поиск экстремума функции одной переменной методом дихотомии.....	30
5. Поиск экстремума функции одной переменной методом золотого сечения. Числа Фибоначчи.....	39
6. Нахождение оптимального решения с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа .....	47
7. Поиск экстремума методом покоординатного спуска .....	60
8. Многокритериальные задачи оптимизации. Оптимизация по Парето .....	68
9. Задачи многокритериальной оптимизации. Свертка критериев .....	73
10. Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения задачи .....	78
Заключение.....	91
Список литературы.....	92

*Учебное издание*

*АБАКУМОВ Александр Михайлович  
МАКАРИЧЕВ Юрий Александрович  
АНТРОПОВ Владимир Евгеньевич*

**Методы принятия решений в прикладных задачах**

Редактор *Е.С. Захарова*  
Компьютерная верстка *М.В. Марченко*  
Выпускающий редактор *Ю.А. Петропольская*

Подписано в печать 29.12.23  
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная  
Усл. п. л. 5,43. Уч.-изд. л. 5,51  
Тираж 50 экз. Рег. № 187/23

---

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский государственный технический университет»  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии  
Самарского государственного технического университета  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8